

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Técnica para la Localización de Fuentes Basada en la
Perspectiva de Reconstrucción de la Señal**

Raúl Oscar González-Pacheco García

TESIS DOCTORAL

Alcalá de Henares 2013

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Técnica para la Localización de Fuentes Basada en la
Perspectiva de Reconstrucción de la Señal**

Autor: Raúl Oscar González-Pacheco García

Director: M. Felipe Cátedra Pérez

Tesis Doctoral presentada en la
Universidad de Alcalá para la obtención del
Título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación

Alcalá de Henares 2013

CERTIFICADO DEL DIRECTOR DE LA TESIS

Dr. D. Manuel Felipe Cátedra Pérez, Catedrático del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá,

HACE CONSTAR:

Que la tesis titulada *“Técnica para la Localización de Fuentes Basada en la Perspectiva de Reconstrucción de la Señal”*, presentada por D. Raúl Oscar González-Pacheco García para optar al título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá y reúne los requisitos para su presentación y defensa pública.

Y para que así conste, firma la presente en Alcalá de Henares, a 23 de Abril de 2013.

El Director de Tesis

Fdo.: Dr. D. Manuel Felipe Cátedra Pérez



Dra. Dña. Teresa Díez Folledo, Profesor Titular de Universidad del Área de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, en calidad de Director del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá,

HACE CONSTAR:

Que la tesis titulada *“Técnica para la Localización de Fuentes Basada en la Perspectiva de Reconstrucción de la Señal”*, presentada por D. Raúl Oscar González-Pacheco García para optar al título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación, y dirigida por el Dr. D. Manuel Felipe Cátedra Pérez, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá y reúne los requisitos para su presentación y defensa pública.

Y para que así conste, firma la presente en Alcalá de Henares, a 23 de Abril de 2013.

El Director del Departamento de Ciencias de la Computación

Fdo.: Dra. Dña. Teresa Díez Folledo



A mis padres

Agradecimientos

Cuando se alcanza una meta que ha demandado años de esfuerzo y sacrificio, además de sentir lógica satisfacción, uno se detiene un instante y vuelve la vista atrás. En mi caso ese camino en el tiempo me conduce a los años de la infancia, cuando mis padres despertaron y alentaron en mí el deseo del saber.

Desde bien temprano me inculcaron los valores cristianos del trabajo, del esfuerzo y del amor por los estudios. A ellos es a quienes debo todo; sin su cariño y protección, pero sobre todo, sin su ejemplo, jamás hubiera alcanzado esta meta.

Otras personas contribuyeron de forma importante tanto en mi educación como en la formación de mi personalidad, bien dándome una infancia feliz, bien creyendo en mi capacidad, bien ayudándome a comprar libros. ¿Cómo no mencionar aquí a Dña. Carmen Lapeyre, a Dña. Ofelia Olmos, a Dña. Maruca Barrientos o a Dña. Susana Rossi? A todas vosotras, que hoy compartís mesa con el Señor, quiero deciros que esto que hoy culmino es también vuestro.

Pero para que ello fuera posible primero Dios tuvo que darme la vida y ponerme al abrigo de mis padres. Por ello es a Él a quien quiero agradecer, antes que a nadie, por haberme dado unos padres maravillosos; por darme salud y condiciones físicas e intelectuales con las que poder cumplir mis sueños; y por esa familia maravillosa que me permitió crear y de la que he recibido apoyo durante todos estos años de arduo trabajo en los que no había tiempo siquiera para compartir juegos con los niños. Por eso quiero expresar aquí mi amor y agradecimiento por quienes más se sacrificaron para que yo culminase este trabajo: mi mujer, Jana, y mis hijos, Ovidio, Marcos y Pablo.

También quiero dar las gracias a Nuestra Señora de Luján y a Santa Lucía, a quienes tanto pidió por mí mi madre y por quienes siempre me he sentido protegido.

Por último, nada de esto podría haberse concretado sin la intervención de docentes como el Dr. Luis Federico Rocha, de la Universidad de Buenos Aires; del Dr.

Agradecimientos

José Antonio Cordero Martín, del Instituto de Automática Industrial de Arganda del Rey, en Madrid; o de los Dres. Fernando Rivas, de la Universidad de Jaén, e Iván González, de la Universidad de Alcalá, que siempre tuvieron el tiempo y la palabra para sacarme de esos caminos sin salida en los que en repetidas ocasiones cayeron mis investigaciones.

Dejo para lo último mi más profundo y sincero agradecimiento a quien confió en mí y, pacientemente, me guió a lo largo de estos años; me refiero al Dr. Felipe Cátedra.

Abstract

There are many applications which make use of sensor arrays to locate signal sources and, in the majority of cases, they attempt to estimate the distance from such sources. There are a large number of methods for estimating the distance, and such methods focus on the case of narrow band signals, that is to say those where the time delay can be likened to phase scrolling.

This thesis focuses on the use of super-resolution algorithms for estimating distances from narrow band sources. Specifically, it is an evaluation of the performance of the most popular super-resolution algorithms, those which enable the reduction of computing time while also increasing precision and reducing the hardware requirements. However, all these parameters vary greatly among themselves, along with the probability of resolution. This determines whether or not they can be used for applications in real time.

The super-resolution methods use the concept of signal sub-space. In order to deal with broadband signals, the signals received are broken down into narrow band signals by means of a band-pass filter, and then the same algorithms are applied with some specific considerations. In synthesis, it can be said that there are two different forms of resolving the decomposed signals. The *incoherent methods* process each band independently, by means of a specific narrow band procedure, averaging the results afterwards. The *coherent methods* modulate the signals in each band so that they can be combined subsequently into a coherent form.

This thesis compares the performance of the different super-resolution algorithms in terms of speed, precision and resource needs. A new method is proposed, which makes use of a single sensor and exhibits a series of desired characteristics for the majority of applications dealing with narrow band sources. The results of the application

of this method to the different super-resolution algorithms are compared with each other and with those of other traditional methods.

Sumario

Son muchas las aplicaciones que utilizan arreglos de sensores para localizar fuentes de señal y, en la mayoría de los casos, buscan estimar la distancia a la que se encuentran esas fuentes. El número de métodos para la estimación de distancias es elevado, y centran su atención en el caso de señales de banda estrecha, es decir, aquellas en las que se puede aproximar el retardo temporal como un desplazamiento de fase.

Esta tesis se enfoca en el uso de algoritmos de super-resolución para la estimación de distancias a fuentes de banda estrecha. En concreto se evalúa el rendimiento de los algoritmos de super-resolución más populares, aquellos que permiten reducir el tiempo de cómputo a la vez que aumentar la precisión y disminuir los requerimientos hardware. Sin embargo todos estos parámetros, junto con la probabilidad de resolución, varían de forma importante entre ellos, lo que determina su utilización o descarte para aplicaciones en tiempo real.

Los métodos de super-resolución utilizan el concepto de subespacio de señal. Para poder tratar con señales de banda ancha, se descomponen las señales recibidas en otras de banda estrecha por medio de un filtrado pasa banda, y se aplican luego los mismos algoritmos con algunas consideraciones específicas. Sintetizando, puede decirse que existen dos formas distintas de resolver las señales descompuestas. Los *métodos incoherentes* procesan, mediante un procedimiento determinado de banda estrecha, cada banda de forma independiente, para luego promediar los resultados. Los *métodos coherentes* modulan las señales en cada banda para que luego puedan combinarse de forma coherente.

En esta tesis se compara el desempeño de los distintos algoritmos de super-resolución en términos de velocidad, precisión y necesidad de recursos. Se propone un nuevo método que hace uso de un solo sensor y exhibe una serie de características deseables para la mayoría de las aplicaciones en las que se trata con fuentes de banda

estrecha. Los resultados de la aplicación de este método a los diferentes algoritmos de super-resolución son comparados entre sí y con los de otros métodos tradicionales.

Índice

Agradecimientos	III
Abstract	V
Sumario	VII
Índice.....	IX
Listado de Gráficos.....	XIII
Listado de Tablas.....	XV
Introducción.....	- 1 -
1.1 Objetivo y contribuciones de este trabajo	- 5 -
1.2 Organización de la Tesis	- 7 -
Conocimientos previos.....	- 11 -
2.1 Propagación de Ondas.....	- 11 -
2.1.1 Representación Espacio-Tiempo	- 11 -
2.1.2 Representación $w - k$	- 14 -
2.2 Arreglo de sensores	- 14 -
2.3 Modelos de señal.....	- 16 -
2.3.1 Señales de banda estrecha	- 18 -
2.3.2 Señales de banda ancha	- 20 -
Estimación de distancias	- 21 -
3.1 Estimación DoA en Banda Estrecha	- 21 -
3.1.1 Métodos de Máxima Probabilidad	- 22 -
3.1.1.1 MLE Incondicional.....	- 22 -
3.1.1.2 MLE Condicional	- 23 -
3.1.2 Métodos de Subespacio de Señal	- 24 -
3.2 Estimación de distancias en banda ancha.....	- 24 -
3.2.1 Subespacio de Señal	- 24 -
3.2.1.1 MUSIC	- 26 -
3.2.1.2 Otros Métodos	- 27 -

3.3 Estimación DOA en Banda Ancha.....	- 27 -
3.3.1 Formación del Haz por Retardo y Suma	- 27 -
3.3.2 Subespacio de Señal	- 30 -
3.3.2.1 Métodos Incoherentes	- 31 -
3.3.2.2 Métodos Coherentes	- 32 -
3.3.2.2.1 CSSM	- 32 -
3.3.2.2.2 BICSSM	- 35 -
3.3.2.2.3 WAVES	- 36 -
Aplicación de los Algoritmos de Super-Resolución.....	- 39 -
4.1 Algoritmos	- 41 -
4.1.1 MUSIC	- 41 -
4.1.2 Root-MUSIC	- 43 -
4.1.3 Matrix-Pencil.....	- 45 -
4.1.3.1 Datos libres de ruido.....	- 46 -
4.1.3.2 Datos Contaminados con ruido.....	- 50 -
4.1.3.2.1 Solución Generalizada	- 51 -
4.1.3.2.2 Solución Estándar	- 58 -
4.1.3.3 Formulación Forward-Backward.....	- 60 -
4.1.3.4 Múltiples muestras temporales o Snapshots	- 62 -
4.2 Comparación de los métodos	- 64 -
4.3 Complejidad de cómputo	- 67 -
Análisis.....	- 75 -
5.1 Modelado ambiental.....	- 77 -
5.2 Acoplamiento entre los elementos del arreglo	- 77 -
5.3 Entornos con señales correladas o coherentes.....	- 78 -
5.4 Carga computacional.....	- 79 -
5.5 Efecto del número P de señales	- 79 -
5.5.1 Sobre estimación del número de señales	- 80 -
5.5.2 Infra estimación del número de señales	- 80 -
Simulaciones	- 81 -
6.1 FFT.....	- 85 -
6.1.1 Ventana de Hamming.....	- 88 -
6.1.2 Ventana Bartlett.....	- 89 -
6.1.3 Ventana Hanning.....	- 91 -
6.1.4 Ventana Chebyshev	- 92 -
6.1.5 Ventana Kaiser	- 94 -

6.1.6 Comparación de los inventanados	- 96 -
6.2 Root-MUSIC	- 97 -
6.3 MUSIC	- 100 -
6.4 Matrix-Pencil	- 106 -
6.5 Especificaciones	- 110 -
6.6 Enfoque	- 111 -
6.7 Resultados	- 113 -
Conclusiones	- 121 -
7.1 Contribuciones	- 123 -
7.2 Trabajo a desarrollar	- 125 -
Referencias.....	- 127 -
Listado de Símbolos y Abreviaturas	- 137 -

Listado de Gráficos

Figura 1: Detector de dirección con escaneo y pantalla analizadora de espectros.....	- 3 -
Figura 2: Coordenadas del arreglo y dirección de la señal	- 13 -
Figura 3: Ejemplo de arreglos de sensores	- 16 -
Figura 4: Espectro de energía de una señal pasa banda real.....	- 17 -
Figura 5: Señales de banda estrecha y ancha en el dominio $w - k$	- 20 -
Figura 6: Formación del haz en la dirección deseada	- 28 -
Figura 7: Formación del haz en banda estrecha	- 29 -
Figura 8: Magnitud de los autovalores asociados con los subespacios de señal y ruido ..	- 42 -
Figura 9: Descripción en bloques del algoritmo MUSIC.....	- 69 -
Figura 10: Descripción en bloques del algoritmo Root-MUSIC.....	- 71 -
Figura 11: Descripción en bloques del algoritmo Matrix-Pencil	- 73 -
Figura 12: Ilustración descriptiva del concepto de Vector Director	- 76 -
Figura 13: Modelado de una zona de la Villa de Madrid	- 82 -
Figura 14: Escenario de simulación en exteriores con un número reducido de efectos ...	- 83 -
Figura 15: Escenario de simulación en exteriores con gran número de efectos	- 84 -
Figura 16: Otro escenario de simulación utilizado.....	- 84 -
Figura 17: Modelado de la planta de un edificio de oficinas	- 85 -
Figura 18: Diagrama en bloques del algoritmo de estimación IFT.....	- 86 -
Figura 19: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Hamming	- 89 -
Figura 20: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Hamming.....	- 89 -
Figura 21: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Bartlett	- 90 -
Figura 22: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Bartlett.....	- 90 -
Figura 23: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Hanning	- 91 -
Figura 24: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Hanning.....	- 92 -

Figura 25: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Chebwin.....	- 93 -
Figura 26: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Chebwin	- 93 -
Figura 27: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Kaiser	- 95 -
Figura 28: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Kaiser	- 95 -
Figura 29: Valor del campo electromagnético para los distintos tipos de ventana.....	- 96 -
Figura 30: Estimación de distancias para los diferentes enventanados	- 96 -
Figura 31: Definición de los parámetros iniciales de la simulación	- 97 -
Figura 32: Ambigüedad en la estimación de la señal incidente.....	- 98 -
Figura 33: Gráfico resultante de la aplicación del Root-MUSIC para localización (número reducido de efectos)	- 98 -
Figura 34: Gráfico resultante de la aplicación del Root-MUSIC para localización (gran número de efectos).....	- 99 -
Figura 35: Error medio para una fuente situada a 250 m.....	- 99 -
Figura 36: Desviación estándar para una fuente situada a 250 m.....	- 100 -
Figura 37: Señal incidente y disposición de los sensores en MUSIC.....	- 100 -
Figura 38: Resultados obtenidos para distintos niveles de ruido: con - SNR=30dB; con * SNR=3dB; con : SNR=60dB	- 102 -
Figura 39: Resultados obtenidos para distintos volúmenes de datos: con - 100 muestras; con * 10 muestras; con : 3 muestras	- 103 -
Figura 40: Efecto producido al variar el número de puntos utilizado para calcular el pseudo-espectro para diferentes distancias de la unidad móvil a la antena: con x -> 256, with * -> 64, con o -> 32.....	- 105 -
Figura 41: Esquema que muestra las posiciones relativas de la fuente y el sensor	- 107 -
Figura 42: Efectividad del algoritmo Matrix Pencil	- 108 -
Figura 43: Cambios en la Desviación Estándar.....	- 109 -
Figura 44: Comportamiento de la Varianza	- 109 -
Figura 45: Errores máximos	- 110 -
Figura 46: Cálculo del pseudo-espectro, mediante MUSIC, para varias distancias	- 117 -
Figura 47: Error en función de la distancia a la fuente para distintos niveles de ruido utilizando MUSIC: con - SNR=30dB; * SNR=3dB; : SNR=60dB.....	- 117 -
Figura 48: Error en función de la distancia a la fuente para distintos volúmenes de datos utilizando MUSIC: con - 100 muestras; * 10 muestras; : 3 muestras	- 118 -
Figura 49: Comparativa de los tiempos de cálculo	- 119 -

Listado de Tablas

Tabla 1- Los parámetros que caracterizan las M cisoides que conforman el vector s , pueden ser calculados a partir de los valores propios de los cuatro problemas propuestos en esta tabla.....	- 50 -
Tabla 2.- Características de los métodos de super-resolución	- 64 -
Tabla 3- Valores estadísticos de media y varianza del estimador en función de la correlación de la señal para una fuente situada a 60 m	- 78 -
Tabla 4- Valores estadísticos de media y varianza del estimador en función de la correlación de la señal para una fuente situada a 80 m	- 78 -

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años los sistemas de posicionamiento utilizados para seguimiento y localización han ido ganando interés, hasta llegar a hacerse omnipresentes en los dispositivos móviles de hoy en día. Un ejemplo típico es el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), que depende de la señal recibida de un número determinado de satélites. El problema es que, en interiores, el GPS deja de tener utilidad debido al apantallamiento y obstrucción que sufren las señales provenientes de los satélites.

Existen sistemas de localización para exteriores (áreas amplias) que se basan en las redes de antenas de telefonía móvil y cuya limitación aparece ligada al tamaño de la celda.

En interiores los distintos sistemas de posicionamiento utilizan diversas tecnologías, entre las que se pueden mencionar el ultrasonido, los infrarrojos, la video-vigilancia y los sistemas que se basan en la fortaleza de la señal recibida.

Para predecir la ubicación de una unidad en entornos móviles se recurre a las características básicas de la señal radio, como ser la fuerza de la señal recibida (RSS), la estimación del ángulo de llegada (AoA) y la del tiempo de llegada (ToA). El método RSS presenta, como desventaja, la desviación aleatoria de la fuerza media de la señal recibida. Esto lo provocan las zonas de sombra y también el efecto canal a pequeña escala [34]. El AoA necesita de arreglos de antena en cada nodo, lo que además de aumentar la complejidad de los sistemas ya existentes, ofrece un peor rendimiento en entornos multicamino.

Para los sistemas de localización en interiores el parámetro más importante es el tiempo de llegada (ToA) del camino de visión directa (DLOS) [60]. Esto hace cobrar importancia a la precisión en la estimación del ToA de las señales que llegan. Existen

distintos parámetros que permiten conocer el desempeño de los estimadores [15] Ellos son:

- Probabilidad de error circular (CEP)
- Disolución geométrica de la precisión (GDOP)
- Error cuadrático medio (MSE)
- Límite inferior de Cramer-Rao (CRLB)

CEP se basa en la varianza de la posición estimada en las direcciones x e y , lo que da una medida grosera de la precisión de la estimación. GDOP es un indicador del desempeño del estimador que depende de la posición real del móvil en relación con la de la estación base. Todos estos estimadores se pueden evaluar comparando sus errores cuadráticos medios con el límite inferior de Cramer-Rao, que representa el extremo teórico de la varianza de la salida del estimador.

Pero el principal factor que limita el despliegue de los sistemas de localización en interiores es la interferencia multi-camino; se trata de un problema severo y complejo, que conduce a que las técnicas convencionales ofrezcan estimaciones inexactas del ToA. Por ello se ha pensado en utilizar técnicas de super-resolución, tales como Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques (ESPRIT), Multiple Signal Classification (MUSIC) o Matrix Pencil, para la estimación de espectros. Estas técnicas mejoran la resolución en el dominio del tiempo a costa de un aumento en la complejidad de implementación.

Los nuevos métodos de transmisión en banda ancha necesitan, a su vez, de nuevas herramientas de radio-monitorización, lo que asigna un papel clave a los detectores de dirección. Los buscadores de dirección convencionales analizan la señal en el canal de frecuencia seleccionado, ayudándose para escoger el canal de interés del modo de escaneo y de una pantalla que muestra el espectro (Figura 1)

1.1 Objetivo y contribuciones de este trabajo

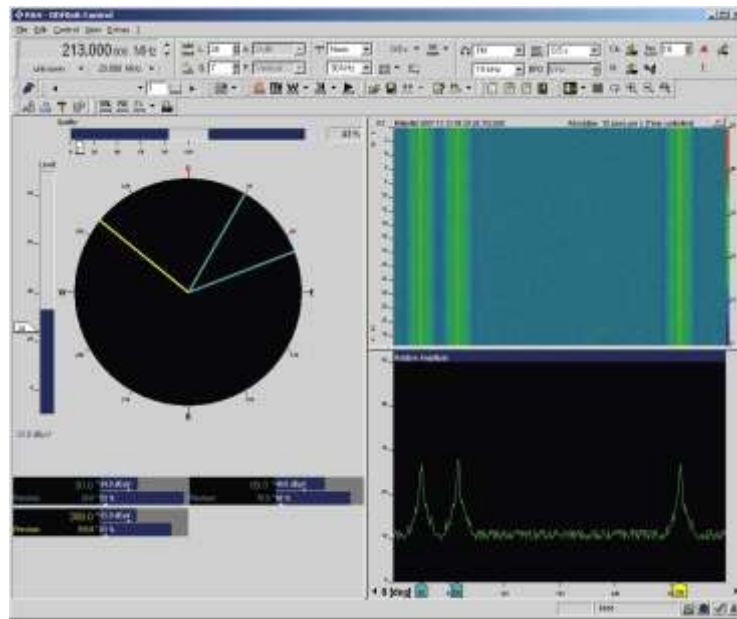


Figura 1: Detector de dirección con escaneo y pantalla analizadora de espectros

Sin embargo cuando se trabaja con banda ancha y señales cortas, solo aquellos buscadores de dirección que abarcan un número importante de canales de frecuencia cuasi-simultáneos, permiten una evaluación rápida de esos escenarios de radio complejos. Esta circunstancia se da especialmente en el caso de señales cortas y en aquellas con superposición espectral.

Los métodos convencionales de búsqueda de direcciones (DF) se fundamentan en la suposición de que el canal de la frecuencia de interés tiene solo una onda dominante. Sin embargo, debido a factores como los que se detallan a continuación, puede que este no sea el caso:

- Solapamiento espectral (por ej. en CDMA)
- Interferencias de gran amplitud (por ej. interferencia electromagnética)
- Propagación multi-trayecto (por ej. reflexiones producidas por los edificios)

Como consecuencia de lo anterior, los errores que se producen inutilizan los resultados obtenidos.

La tecnología DF convencional [31] ofrece dos soluciones:

- Cuando el componente interferente tiene una potencia menor que el de la señal deseada, el error DF puede minimizarse dimensionando

adecuadamente el buscador de direcciones (seleccionando una apertura de antena que sea lo suficientemente grande)

- Si, por el contrario, el componente interferente es igual o mayor que el correspondiente a la señal deseada, se pueden tomar portadoras separadas de señales no correladas, utilizando DF de alta resolución en banda ancha. De este modo se saca beneficio de las diferencias espectrales de las señales.

Los métodos de super-resolución, como su nombre indica, son capaces de resolver un campo de ondas con múltiples señales en la misma frecuencia. El número de estas que son capaces de manejar con precisión dependerá del ángulo de incidencia y de la relación señal/ruido.

Ofrecen una solución sistemática al permitir calcular el número de ondas que intervienen y su ángulo de incidencia, bien basándose en el modelo, mediante el método de máxima probabilidad, o por medio del análisis de los componentes principales (PCA) de los datos.

La mayoría de los métodos radio DF se basan en la suposición de que una frecuencia determinada la ocupa exclusivamente el transmisor objeto de interés. Sin embargo, si hay otros operando en la misma frecuencia, la búsqueda de direcciones se ve afectada por el problema conocido como interferencia co-canal [50] Los resultados dependen entonces de la relación de niveles de potencia de los transmisores. Cuando uno de ellos es claramente más potente que los otros, la dirección que se muestra es la de este, aunque con ligeros errores. Si los niveles son similares, los valores que resultan son, por lo general, incorrectos. Esto vale para todos los principios DF convencionales (interferómetro correlativo, Doppler y Watson-Watt) [4, 28, 31, 48, 55]

La interferencia co-canal es muy frecuente en la práctica. En el rango de HF, por ejemplo, las características de propagación cambian continuamente; en este contexto las emisiones pueden viajar con frecuencia mucho más allá de lo inicialmente previsto y, por tanto, ser recibidas en áreas donde otra estación esté transmitiendo en la misma frecuencia.

Los dispositivos electrónicos defectuosos pueden también interferir electromagnéticamente en la frecuencia de los transmisores. Otro escenario de este tipo se produce en redes de frecuencia única como las que se utilizan en DAB / DVB, donde, para mejorar la calidad de transmisión, la misma señal en idéntica frecuencia es emitida por múltiples transmisores desde diversas posiciones.

Es lo que sucede cuando se trabaja con el método CDMA, que es el que se utiliza en el estándar UMTS, donde varias estaciones transmiten simultáneamente su señal en el mismo rango de frecuencias. Para distinguir las diferentes señales los receptores recurren al código de propagación que se superpone al mensaje.

1.1 Objetivo y contribuciones de este trabajo

La información puede viajar a través de ondas electromagnéticas, sonar, ondas acústicas o sísmicas. Esa capacidad de transmitir o recibir información entre dos ubicaciones sin conexión física alguna, resulta evidentemente atractiva para un sinnúmero de aplicaciones.

En el entorno militar es necesario detectar y reconocer objetos enemigos mediante la recepción de señales emitidas desde esos mismos objetos. Una de esas aplicaciones, el radar, es de uso frecuente tanto en entornos militares como civiles. La comunicación inalámbrica es otra aplicación que conlleva un campo de investigación muy activo, llegando a conseguir velocidades a partir de 433 Mbps en el futuro estándar IEEE 802.11ac. A medida que las aplicaciones se vuelven más complicadas, se necesita procesar un mayor número de señales, más datos y/o conseguir mayor robustez, lo que está más allá de la capacidad de comunicación que puede ofrecer un solo sensor.

Durante años para recibir o enviar señales a través de un canal inalámbrico se han utilizado sistemas con múltiples sensores [5] Los sistemas de arreglos de sensores presentan una serie de ventajas sobre los de sensor único. En primer lugar, al procesar adecuadamente las señales recibidas, pueden aumentar hasta M (M = número de sensores) veces la relación señal ruido (SNR) que ofrece un sistema de sensor único. En segundo lugar, los arreglos de sensores permiten dirigir los haces de transmisión o recepción y, al hacerlo, posibilitan la distinción de las múltiples señales. Esto resulta muy útil en aplicaciones tales como las comunicaciones inalámbricas multi-usuario, que requieren procesar tantas señales como sea posible sin interferencia mutua, o en aplicaciones de radar pasivo, que necesitan localizar los lugares de origen de la señal.

Uno de los parámetros más importantes que debe estimarse en la mayoría de las aplicaciones es la dirección de llegada (DoA) Para radar, por ejemplo, este es el factor de mayor importancia a la hora de localizar objetivos. En comunicaciones, la estimación de estos parámetros da diversidad espacial al receptor, lo que permite habilitar escenarios multi-usuarios.

Dada su importancia a la hora del procesamiento de los arreglos de señal, existe un gran número de algoritmos para la estimación de la DoA. Los métodos basados en el subespacio de señal presentan un alto rendimiento con un coste computacional relativamente bajo. MUSIC (**M**Ultiple **S**ignal **C**lassification) [41], ESPRIT [21] y Matrix Pencil [59] entran dentro de esa categoría. La mayoría de estos métodos aprovechan el hecho de que cuando las señales son de banda estrecha, la salida de los distintos sensores difiere solo en su fase. Esa es la razón por la que los métodos de subespacio trabajan exclusivamente con señales de este tipo.

En los últimos años han pasado a recibir más atención las señales de banda ancha porque están remplazando a las de banda estrecha en un número considerable de aplicaciones. Un ejemplo es el radar de banda ultra ancha (UWB), que proporciona imágenes de alta resolución [63], y donde la comunicación inalámbrica en UWB puede reducir el desvanecimiento del canal por efecto del multi-camino. El empleo de señales con anchos de banda del orden de los gigahertzios implica que podremos resolver el multi-camino a niveles tales que permitan distinguir retardos diferenciales del orden del nanosegundo o aún menores, o dicho en otras palabras, obtener una resolución del orden de los 30 cm en la longitud del camino recorrido. Esto evidentemente reduce de forma importante el efecto del desvanecimiento aún en entornos de interiores.

Esta capacidad de resolución del multi-camino junto que la capacidad de penetrar a través de los materiales impulsa esta tecnología para su uso en sistemas radio de corto alcance y alta calidad en interiores. La falta de un significativo desvanecimiento provocado por el multi-camino reduce de forma considerable los requerimientos del enlace en cuanto a los márgenes a tener en cuenta para este factor, permitiendo así que la transmisión se lleve a cabo con bajos niveles de potencia. Si juntamos la baja potencia de transmisión con el corto alcance, resulta que la banda ultra ancha ofrece una densidad espectral de potencia extremadamente baja, lo que asegura la no interferencia de los impulsos radio con los sistemas radio de banda estrecha que operan en bandas dedicadas [62]

Las señales de banda ancha, además de para el seguimiento de objetos en movimiento, se utilizan también para mediciones acústicas [27] o para encontrar objetos enterrados haciendo uso de sensores sísmicos [61]

Para poder aplicar las técnicas de banda estrecha, y debido al límite de ancho de banda de los métodos convencionales de subespacio de señal, se deben realizar algunos procesamiento previos o, si ello no es posible o deseable, aplicar un método especial para señales de banda ancha [7, 8, 18, 58] También puede recurrirse a los métodos de

banda estrecha en el caso en que las señales de banda ancha se descompongan en múltiples señales de banda estrecha [54]

Los llamados *métodos incoherentes* son aquellos en los que se aplican independientemente métodos de banda estrecha a múltiples señales. Además de los métodos incoherentes, se han publicado otros muchos enfoques relacionados con la estimación DoA en banda ancha [7, 66, 20, 52, 33, 67, 10]

Los llamados *métodos coherentes* utilizan todos los componentes de frecuencia de una señal de banda ancha de forma coherente. La mayoría de ellos implican la conversión de datos de banda ancha o estadísticas, directa o indirectamente, en formas de banda estrecha a los que poder aplicar cualquier método de subespacio en ese tipo de banda.

Uno de los más conocidos es el *método coherente de subespacio de señal* (CSSM) [10], del que se derivan muchos otros [66, 20] El CSSM requiere un paso previo de procesamiento, denominado “*enfoque*”, que mejora la eficiencia de la estimación mediante la condensación de la energía de las señales de banda estrecha dentro de un subespacio predefinido [67] Se parte de una estimación inicial, lo más aproximada posible, de las DoA. Si esos valores iniciales difieren del valor real, aunque el número de muestras se acercara al infinito, la estimación resultante sería errónea [52]

1.2 Organización de la Tesis

Esta tesis propone técnicas paramétricas (aquellas que sacan ventaja de los parámetros conocidos de la señal, como puede ser el número de tonos que contiene) y no paramétricas (aquellas que no hacen ninguna suposición a priori) para la localización de fuentes, obteniendo una mayor resolución, con reducción apreciable de los lóbulos laterales y mejora de la robustez en cuanto a limitaciones en la calidad y cantidad de datos.

Para realizar el estudio se implementó un procedimiento de medición calibrado mediante simulaciones, y se hizo uso de una herramienta que determina el valor del campo electromagnético del entorno real bajo estudio. Esta herramienta fue validada para proporcionar resultados fiables y en un tiempo de ejecución no demasiado elevado. De aquí se obtuvo la firma espacial, o lo que es lo mismo, la distancia recorrida por cada trayecto de la señal.

Como modelado geométrico de los obstáculos se utilizó la representación de las superficies.

Desde un punto de vista matemático, el problema de localización de emisores es análogo al de la estimación espectral. En otras palabras, la frecuencia es para la estimación espectral, lo que la posición angular es para la localización de fuentes radiantes.

Hay numerosas técnicas de análisis espectral que se podrían aplicar en la resolución de este problema. Para estimar la dirección de llegada (DoA) de una o más señales se han propuesto diversos métodos, por ejemplo los derivados de la aplicación de la transformada de Fourier, y los no paramétricos como MUSIC, ESPRIT, MODE, SSF, NSF, MP y variantes de todos ellos. Estos métodos determinan la DoA explotando estadísticas de segundo orden (en particular la matriz de covarianza y su auto-descomposición)

Los métodos basados en subespacio (MUSIC, ESPRIT, MP, etc.) nacen como consecuencia del trabajo de descomposición armónica del matemático ruso Pisarenko, quien a principios de los '70 estudió el problema de la estimación de las frecuencias de una secuencia discreta conformada como suma de exponenciales complejas contaminadas con ruido blanco gaussiano.

La aproximación consiste en formar una estimación de la energía de la señal en función del ángulo de incidencia, lo que presenta picos dominantes en dirección a las fuentes. Esa estimación del campo de la señal se obtiene mediante el empleo de herramientas de simulación.

A continuación se detalla la organización de esta tesis. En el Capítulo 2, se introducen los conceptos básicos del procesamiento de los arreglos de señal. Se describe la propagación de los campos de ondas y los arreglos de sensores, así como los modelos de señal de banda estrecha y banda ancha, que distinguen unos métodos de otros.

En el Capítulo 3, se explican algunos métodos de procesamiento de los arreglos de señal tanto de banda estrecha como de banda ancha. Aunque los métodos que se detallan en este capítulo son sólo una pequeña parte del total de los mismos, aclaran la diferencia entre tratar con señales de banda estrecha o banda ancha.

El Capítulo 4 muestra la aplicabilidad de las técnicas de super-resolución a una aplicación, comparando los distintos métodos y estudiando sus respectivas complejidades de cálculo.

En el Capítulo 5 se consideran los factores más relevantes que afectan el desempeño de los algoritmos analizados.

El Capítulo 6 presenta los resultados de las simulaciones y experimentos hechos por ordenador. Se han considerado distintos escenarios que permiten hacer una comparación completa de los nuevos métodos frente a los anteriores. Aparece resumido el rendimiento de los estimadores y se añaden comentarios.

Por último, en el Capítulo 7 se llega a la conclusión de esta tesis con sus contribuciones y las líneas de trabajo a seguir.

Capítulo 2

Conocimientos previos

En este capítulo se discuten los conceptos básicos del procesamiento de los arreglos de señal. En primer lugar se hablará del campo de propagación escalar, para luego hacer lo propio con los arreglos de sensores. Más adelante se comparan los modelos de arreglos de señal para señales de banda estrecha y de banda ancha. Estos modelos muestran el por qué, en función del ancho de banda de la señal, son necesarios dos métodos distintos para estimar la DoA.

2.1 Propagación de Ondas

2.1.1 Representación Espacio-Tiempo

Las ondas de propagación son función tanto del tiempo como del espacio. De acuerdo con la física, pueden describirse como soluciones a la ecuación de la señal [5] La ecuación de la señal para un campo electromagnético se deriva de la ecuación de Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

donde \vec{E} es la intensidad de campo eléctrico, c es la velocidad de propagación, y ∇^2 es el operador de Laplace.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.1 Propagación de Ondas

$\vec{r} = (x, y, z)$ es el *vector de posición*, en el que cada uno de los tres elementos representa la posición a lo largo de uno de los tres ejes espaciales. Si añadimos un campo escalar general $s(\vec{x}, t)$, la ecuación de la señal se convierte en:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (1)$$

La solución de la ecuación en derivadas parciales (1) se asume que es un complejo exponencial del tipo:

$$s(\vec{x}, t) = s(x, y, z, t) = A \exp \{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\} \quad (2)$$

Remplazando (2) en (1), se obtiene la siguiente relación entre constantes:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3)$$

Si se satisface la ecuación (3), el exponencial complejo (2) es una solución de la ecuación de la señal. La solución se puede describir utilizando la notación vectorial y el producto interno:

$$s(\vec{x}, t) = s(x, y, z, t) = A \exp \{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\} \quad (4)$$

donde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el llamado *vector de número de ondas*, y la exponencial, una onda plana monocromática.

Un campo escalar puede expresarse, según [5], en términos de ondas planas de múltiples frecuencias:

$$s(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp \{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\} d\omega$$

Se trata de la representación espacio-tiempo de las ondas de propagación. A la distancia que se propaga durante un período temporal T, se la conoce como *longitud de onda*. Es decir,

$$\lambda = cT = c \frac{2\pi}{\omega}$$

Puesto que de (3):

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

también puede representarse a la longitud de onda por,

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

A su vez el término de la fase en la ecuación (4) puede escribirse como,

$$j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = j\omega(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{r}) \quad (5)$$

Generalmente, la dirección y la velocidad de la propagación están definidas en (5) por el vector $\vec{\alpha}$, llamado *vector de lentitud*. Partiendo de (3) y (5) se puede demostrar fácilmente que la magnitud de $\vec{\alpha}$ es la inversa de la velocidad de propagación.

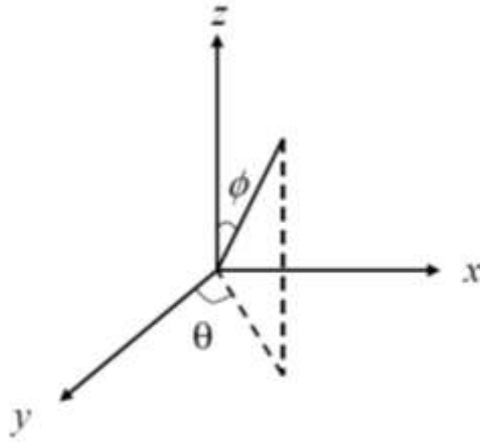


Figura 2: Coordenadas del arreglo y dirección de la señal

Si se utilizan coordenadas espaciales, como en la Figura 2, el vector lentitud se expresa del siguiente modo:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{c}(\sin \Theta \sin \phi, \cos \Theta \sin \phi, \cos \phi) \quad (6)$$

donde c es la velocidad de propagación, Θ es el ángulo de azimut y Φ el de elevación. Una vez estimado el vector lentitud, se puede obtener también la dirección o la velocidad de propagación.

La representación espacio-tiempo de una señal mediante su vector lentitud es:

$$s(\vec{x}, t) = s(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp \left\{ jw(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{r}) \right\} dw \quad (7)$$

donde $S(w)$ es la transformada de Fourier de $s(\cdot)$

2.1.2 Representación $w - k$

Las señales de propagación se pueden representar también en el espacio número de onda – frecuencia (w, k) luego de sacar la transformada de Fourier de la representación espacio-tiempo. Dado que la señal del arreglo no es solo función del tiempo sino también del espacio, se hace necesaria una transformada multidimensional de Fourier. La transformada de Fourier cuatri-dimensional ($x; y; z; t$) de la señal espacio-tiempo es:

$$S(\vec{k}, w) = \iint s(\vec{r}, t) e^{-jw t} e^{j\vec{r} \cdot \vec{k}} d\vec{r} dt \quad (8)$$

El campo de ondas sobre el eje x , $\vec{r} = (x, 0, 0)$, se expresa entonces como:

$$S(k_x, w) = \iint s(x, t) e^{-jw t} e^{jx k_x} dt dx$$

2.2 Arreglo de sensores

Los arreglos de sensores se componen de varios elementos que ocupan posiciones distintas en el espacio.

Los sensores, todos ellos, muestrean y registran las señales que se propagan y lo hacen de forma simultánea. En otras palabras, la señal del arreglo es una señal que se propaga y que este muestrea espacial y temporalmente. La señal que recibe el sensor m puede representarse como (7), donde \vec{r} es sustituido por \vec{r}_m , que denota la ubicación del sensor. Cuando hay P fuentes viajando desde P direcciones distintas y se asume que la respuesta del sensor es una, entonces la salida del sensor m es:

$$x_m(t) = \sum_{i=0}^{P-1} s_i(t - \vec{r}_m \cdot \vec{\alpha}_i) + \eta_m(t) \quad (9)$$

donde $\eta_m(t)$ es el ruido aditivo en el sensor m . Por lo general se asume que este no tiene correlación con las fuentes y es blanco, tanto temporal como espacialmente. Si el ruido no es blanco, pero se conoce su covarianza, podremos tratar con él luego de blanquearlo.

La velocidad de propagación c de las ondas electromagnéticas en el vacío es de 3×10^8 m/s, o de 344 m/s para las ondas acústicas al aire libre. La señal que recibe cada sensor no es otra cosa que la suma de P fuentes con diferentes retardos. Desde el punto de vista del receptor los parámetros a estimar son el número de fuentes P , las señales originales $s_i(t)$, el ángulo de azimut θ y el ángulo de elevación ϕ . La estimación de P difiere bastante de la de las DoA (θ ó ϕ)

Para el desarrollo de la tesis se estima conocido el número de fuentes P (o al menos correctamente estimado) excepto en el Capítulo 5, donde se discute el efecto de una estimación incorrecta del número de señales. Sin embargo, no siempre se pueden estimar de forma unívoca los dos parámetros θ y ϕ . En función de la geometría del arreglo, dos señales con la misma velocidad de propagación pero diferentes direcciones, podrían parecer ser las mismas. El conjunto de direcciones que el arreglo es incapaz de distinguir recibe el nombre de *conjunto de ambigüedad* [5]

Si los sensores se colocan linealmente (ver Figura 3(a)), sólo la componente x del vector de lentitud va a influir en la salida de sensor. En este caso, dado el ángulo θ de azimut, el conjunto de ambigüedad adopta una forma cónica alrededor de los arreglos, cuyo eje está a lo largo de los mismos. Debido a esta superficie de ambigüedad, en el caso de arreglos lineales no se puede determinar el ángulo de elevación de forma unívoca, y el rango de los ángulos de azimut se limita al semiespacio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

En el caso de arreglos planos, se pueden hallar las componentes x e y del vector lentitud. Dado que su magnitud es fija, es sencillo encontrar la tercera componente. Sin embargo existe ambigüedad con respecto al eje z , puesto que todavía no se sabe el signo de esa componente. Pero para los arreglos en 3D sí que podremos determinar de forma unívoca tanto el azimut como el ángulo de elevación.

Su extensión a matrices multidimensionales es directa.

2.3 Modelos de señal

El ancho de banda de una señal se define como el rango de frecuencia temporal donde su potencia es distinta de cero. Las señales que tienen una única banda de paso se llaman señales pasa banda (Figura 4)

De acuerdo con su ancho de banda fraccional, que es la relación entre el ancho de banda y la frecuencia central, la señal puede ser de banda estrecha o de banda ancha. El ancho de banda fraccional de la señal recibida es muy importante, porque esta se modela de forma distinta en función de ese valor. Para aclarar más las cosas, digamos que un problema de DOA/DF recibe la calificación de *banda estrecha* si el ancho de banda de la señal es pequeño en comparación con la inversa del tiempo de tránsito de un frente de ondas que atraviese el arreglo, y que la respuesta de este no esté en función de la frecuencia sobre el ancho de banda de la señal.

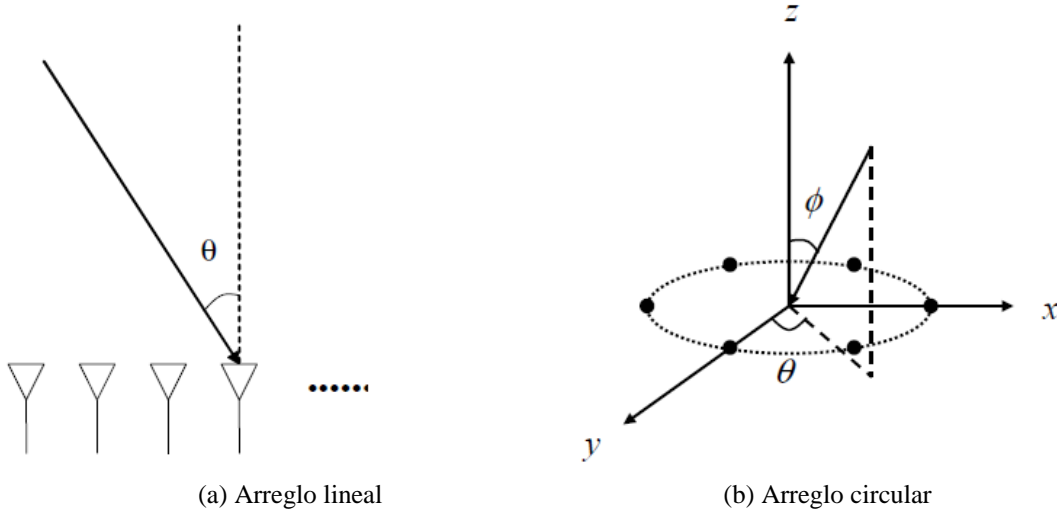


Figura 3: Ejemplo de arreglos de sensores

En este capítulo se explica el papel que juega el ancho de banda en el procesamiento de señales en arreglos. Una gran parte del mismo ha sido adaptada del libro de Stoica y Moses [32]

Si se redefine la salida del m -ésimo sensor, x_m , para el caso de una única fuente:

$$x_m(t) = h_m(t) * s(t - \tau_m) + \eta_m(t) \quad (10)$$

donde $h_m(t)$ es la respuesta al impulso del sensor m -ésimo y $(*)$ denota convolución. El modelo (9) representa el caso particular en que $h_m(t) = 1$. Por lo general la señal origen

$\mathbf{s(t)}$ es una señal modulada formada por la función $\mathbf{b(t)}$, que es una señal en banda base.

Si $\mathbf{s(t)}$ es una función real, su densidad espectral de potencia es simétrica alrededor de $\omega = 0$, como lo muestra la Figura 4. La representación de (10) en el dominio de la frecuencia es:

$$X_m(\omega) = H_m(\omega) [B(\omega - \omega_c) + B^*(-\omega - \omega_c)] e^{-j\omega\tau_m} + N_m(\omega) \quad (11)$$

donde $N_m(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\eta_m(t)$. $\tilde{x}_m(t)$ es la señal desmodulada, que se obtiene de $x_m(t)$ como:

$$\tilde{x}_m(t) = x_m(t) e^{-j\omega_c t}$$

La transformada de Fourier de la señal desmodulada es:

$$\tilde{X}_m(\omega) = H_m(\omega + \omega_c) [B(\omega) + B^*(\omega - 2\omega_c)] e^{-j\omega\tau_m} + N_m(\omega + \omega_c) \quad (12)$$

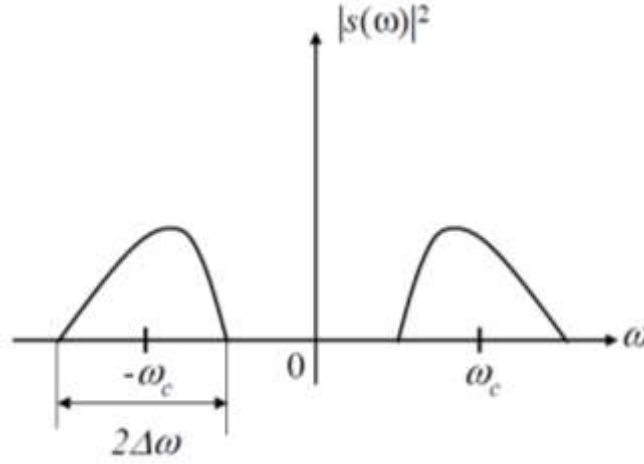


Figura 4: Espectro de energía de una señal pasa banda real

Después de que el filtro pasa banda elimine el término $B^*(\omega - 2\omega_c)$ queda:

$$\tilde{X}_m(\omega) = H_m(\omega + \omega_c) B(\omega) e^{-j\omega\tau_m} + N_m(\omega + \omega_c) \quad (13)$$

Si consideramos que la respuesta en frecuencia del sensor $H_m(\omega + \omega_c)$ es constante para todo el ancho de banda de la señal, $H_m(\omega + \omega_c) \cong H_m(\omega_c)$ y

$$\bar{X}_m(\omega) \cong H_m(\omega_c) B(\omega) e^{-j(\omega + \omega_c)\tau_m} + N_m(\omega + \omega_c)$$

$$= H_m(w_c)B(w)e^{-jw_c(1+\frac{w}{w_c})\tau_m} + N_m(w + w_c) \quad (14)$$

Este es el modelo de señal recibida, común para ambos tipos de fuentes: banda ancha o banda estrecha. Aún en el caso en que $H_m(w)$ no sea plana, una vez conocida la respuesta en frecuencia del sensor, se puede aplanar compensándola adecuadamente.

2.3.1 Señales de banda estrecha

Si el ancho de banda de $B(w)$ es $2\Delta w$ y $\frac{\Delta w}{w_c} \ll 1$, entonces se puede aproximar

(14) por:

$$\bar{X}_m(w) = H_m(w_c)B(w)e^{-jw_c\tau_m} + N_m(w + w_c) \quad (15)$$

y este modelo resultante corresponde al de una señal de banda estrecha. Aplicando la transformada inversa de Fourier, se obtiene lo siguiente:

$$\bar{x}_m(t) = H_m(w_c)b(t)e^{-jw_c\tau_m} + \bar{\eta}_m(t) \quad (16)$$

En un modelo simple como este, la salida del sensor se puede representar fácilmente como una forma vectorial:

$$\mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{a} + \mathbf{n}(t) \quad (17)$$

donde:

$$\mathbf{x}(t) = [\bar{x}_0(t) \dots \bar{x}_{M-1}(t)]^T$$

$$\mathbf{n}(t) = [\bar{\eta}_0(t) \dots \bar{\eta}_{M-1}(t)]^T$$

y \mathbf{a} es un vector del arreglo colector que puede representarse como:

$$\mathbf{a} = [e^{-jw_c\tau_0} e^{-jw_c\tau_1} \dots e^{-jw_c\tau_{M-1}}]^T$$

Para P fuentes, $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0(t) \\ \vdots \\ s_{p-1}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t) \\
&= \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)
\end{aligned} \tag{18}$$

donde a la matriz \mathbf{A} , de dimensión $M \times P$, se la llama *matriz de respuesta* del arreglo. Por lo general, suponiendo un arreglo colector con distintas DoA independientes, \mathbf{A} es una matriz de rango completo. Debe tenerse en cuenta que el vector del arreglo colector a_i muestra su dependencia de la DoA de la señal a través del valor del retardo τ_i .

Este modelo vectorizado de señal se utiliza en la mayoría de las técnicas de procesamiento de señales de banda estrecha [5, 45]. Al poder representarse cada DoA mediante un vector del arreglo colector, la propiedad de rango-uno en (18) se mantiene para el caso de señales de banda estrecha.

La propiedad de rango-uno establece que el rango de la matriz de correlación del vector de salida del sensor es el mismo que el número de señales no correladas. Si se asume que no hay ruido, la matriz de correlación de $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)] \\
&= \mathbf{A} E[\mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(t)] \mathbf{A}^H
\end{aligned}$$

Puesto que \mathbf{A} es una matriz de rango completo $M \times P$, si asumimos que la matriz de correlación de $\mathbf{s}(\mathbf{t})$ también lo es, entonces \mathbf{R}_x es una matriz $M \times M$ de rango P , que es el número de señales. Es posible separar el espacio M -dimensional de las señales recibidas en el subespacio P -dimensional de la señal y los subespacios de ruido de dimensión $(M - P)$, lo que constituye la base de los métodos de subespacio de señal. En [29] se discute la relación entre la propiedad de rango-uno y el ancho de banda de la señal mediante la utilización de los valores propios.

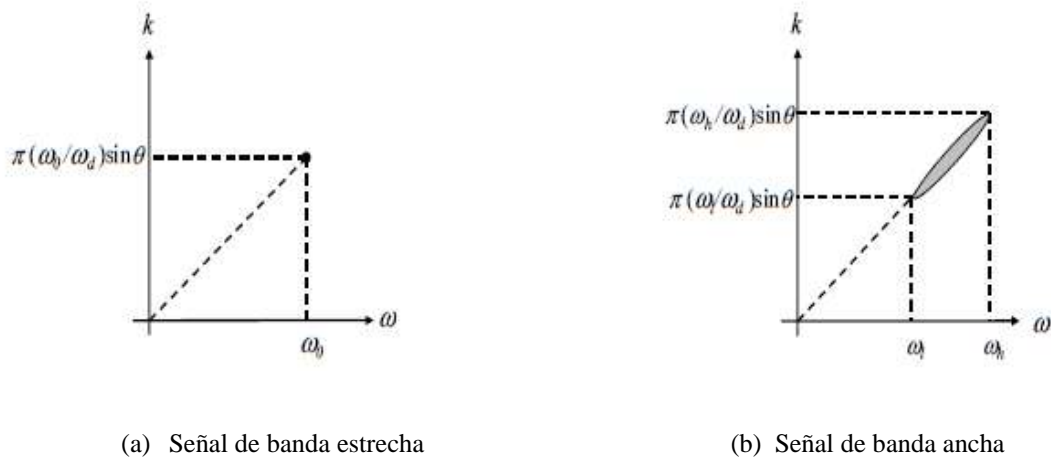


Figura 5: Señales de banda estrecha y ancha en el dominio $w - k$

2.3.2 Señales de banda ancha

Cuando el ancho de banda Δw es comparable a la frecuencia central w_c , la función $\mathbf{s}(\mathbf{t})$ representa una señal de banda ancha, y a (14) no se la puede representar más por (15). En otras palabras, el término exponencial en (14) no es una constante y la salida del sensor no puede ser vectorizada como en el modelo de señal de banda estrecha.

La Figura 5 compara las señales de banda ancha y estrecha en el dominio $w - k$ para el caso de arreglos lineales. Mientras que las señales de banda estrecha aparecen como una función delta de Dirac en una frecuencia temporal y en un número de onda, las de banda ancha ocupan un rango relativamente amplio de frecuencias. Una forma simple de tratar las señales de banda ancha es descomponerlas en varias señales de banda estrecha, utilizando para ello grupos de filtrado o la transformada discreta de Fourier en el dominio temporal, y recogiendo aquellas frecuencias con mayor potencia para, a continuación, aplicar métodos de banda estrecha a cada componente de la señal descompuesta.

Sin embargo, esta forma de abordar el problema no se aprovecha de todas las ventajas de la banda de frecuencia de la señal porque ignora algunos rangos de frecuencia que pudieran contener información sobre la DOA.

Otra clase de métodos de banda ancha son los del dominio del tiempo, como el de formación del haz por retardo y suma (DS)

Capítulo 3

Estimación de distancias

En el capítulo anterior se repasaron los conocimientos básicos relacionados con el proceso de arreglos de señal. En este capítulo se introducen distintos métodos de estimación de la DoA. Puesto que en función del ancho de banda de la fuente hay dos tipos de modelo de señal, se considerarán ambos. El capítulo comienza con los métodos de estimación DoA de banda estrecha y continúa con los correspondientes a banda ancha.

3.1 Estimación DoA en Banda Estrecha

El modelo de arreglos de señal para fuentes de banda estrecha que se definió en la sección 2.3, es:

$$x(t) = A(\theta)s(t) + n(t) \quad (19)$$

donde **A** aparece escrito como $A(\theta)$ para enfatizar su dependencia con la DoA, y donde el vector θ contiene los ángulos a las P fuentes:

$$\theta = [\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{P-1}]$$

Suponiendo que tanto la posición del sensor como la velocidad de propagación son conocidas, el vector del arreglo colector se identifica por los retardos inter-sensor y las DoA:

$$a(\theta) = [1e^{-jw_0\tau_1} \dots e^{-jw_0\tau_{M-1}}]^T \quad (20)$$

donde τ_m es el retardo en el m -ésimo sensor. En caso de un arreglo lineal, y cuando la distancia entre sensores es $d = \frac{\lambda}{2}$ (ULA), donde λ es la longitud de onda a la frecuencia

ω_0 , el vector del arreglo colector se simplifica como:

$$a(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\pi d \sin(\theta)} & \dots & e^{-j\pi(M-1)d \sin(\theta)} \end{bmatrix}^T$$

Cuando se conoce la estructura de la matriz de respuesta del arreglo, la estimación DoA se convierte en un método de estimación de parámetros que intenta encontrar θ en la respuesta del arreglo colector **A(θ)** a partir del vector de salida del sensor **x(t)**

3.1.1 Métodos de Máxima Probabilidad

Conociendo la densidad de probabilidad del ruido y la forma de onda de la señal, es posible extraer la DoA a partir de la estimación de máxima probabilidad (MLE)

Dependiendo de la naturaleza de la señal de origen, hay dos tipos de MLE. El MLE *incondicional* sirve para señales aleatorias, mientras que el *condicional* es para señales determinísticas [45]

3.1.1.1 MLE Incondicional

Supongamos que las señales origen son variables aleatorias con una media conocida que no depende de la DoA. Consideremos que el ruido tiene media cero y es gaussiano. Entonces de (19) se extrae que, para una sola muestra, la densidad de probabilidad de **x** es:

$$p(x, \theta) = \frac{1}{|\pi R_x(\theta)|} \exp \{ -(x - m_x)^H R_x^{-1}(\theta) (x - m_x) \}$$

donde m_x es la suma de la media de las fuentes de señal, y:

$$R_x = A(\theta)R_s A^H(\theta) + \sum \quad (21)$$

donde \mathbf{R}_s es la matriz de correlación de la señal de origen $\mathbf{s}(\mathbf{t})$ y Σ es la matriz de correlación del ruido.

Sin pérdida de generalidad asumimos que $m_x = 0$ y consideramos que $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(j)$ para $j = 0, \dots, J-1$ son muestras independientes. Luego, la función densidad de probabilidad conjunta es:

$$p(x_0, x_1, \dots, x_{J-1}; \theta) = \prod_{j=0}^{J-1} \frac{1}{|\pi R_x(\theta)|} \exp \{ -x_j^H R_x^{-1}(\theta) x_j \}$$

Después de despejar todas las constantes que son independientes de θ ,

$$\begin{aligned} L_x(\theta) &= \ln p(x_0, x_1, \dots, x_{J-1}; \theta) \\ &= - \left[\ln |R_x(\theta)| + \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} x_j^H R_x^{-1}(\theta) x_j \right] \end{aligned} \quad (22)$$

El objetivo de MLE es encontrar el vector θ que maximiza (22), es decir,

$$\hat{\theta} = \arg_{\theta} \min |L_x(\theta)|$$

La ecuación (22) es una función no lineal y la MLE tiene que hallar su punto mínimo en un espacio P -dimensional. Aunque la MLE es en cierto sentido el estimador óptimo, rara vez se utiliza para encontrar DoA debido a su alto coste computacional y a su sensibilidad a los errores que se producen en la función densidad de probabilidad.

3.1.1.2 MLE Condicional

El MLE condicional se utiliza cuando se modela la señal de origen como una señal desconocida pero determinista. En este caso, la función de densidad de probabilidad conjunta es:

$$p(x_0, x_1, \dots, x_{J-1}; \theta) = \prod_{j=0}^{J-1} \frac{1}{|\pi \sigma^2 I|} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} |x_j - A(\theta) s_j|^2 \right\}$$

donde se asume que la covarianza del ruido es $\sigma^2 I$.

La función de probabilidad logarítmica es:

$$L(\theta, s) = -JM \ln \sigma^2 \sum_{j=0}^{J-1} |x_j - A(\theta)s_j|^2 \quad (23)$$

El MLE condicional maximiza (23), lo que es equivalente a minimizar:

$$L'(\theta, s) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=0}^{J-1} |x_j - A(\theta)s_j|^2$$

3.1.2 Métodos de Subespacio de Señal

Los métodos basados en el subespacio de señal, en lugar de procesar directamente los datos recibidos, utilizan la matriz de correlación de la salida del sensor. Para encontrar los subespacios de señal y ruido estos métodos aprovechan las ventajas de la propiedad de rango-uno de las señales de banda estrecha.

La matriz de correlación de la salida del sensor viene dada por (21):

$$R_x = E[x(t)x^H(t)] = A(\theta)R_s A^H(\theta) + \sum$$

Cuando el ruido es blanco, $\sum = \sigma^2 I$. Si se conoce la matriz de covarianza del ruido, se puede convertir en ruido blanco. Debemos tener en cuenta que, cuando la matriz de correlación de ruido es de rango completo, el rango de \mathbf{R}_x es M (rango completo)

3.2 Estimación de distancias en banda ancha

3.2.1 Subespacio de Señal

Se supone que las fuentes de señal $\mathbf{s}(\mathbf{t})$ no están completamente correlacionadas. Entonces la matriz de correlación \mathbf{R}_s es una matriz de rango completo. El rango de \mathbf{R}_x , que es un espacio M -dimensional, se puede dividir en dos subespacios ortogonales:

- 1) un subespacio de señal P -dimensional que es el rango de $\mathbf{A}(\theta)$ y
- 2) un subespacio de ruido, de dimensión $(M - P)$

Los subespacios de señal y ruido pueden hallarse mediante la descomposición de los autovalores (EVD) de la matriz [40] de correlación \mathbf{R}_x . Suponiendo que las P fuentes sean incorreladas, entonces \mathbf{R}_s es una matriz diagonal y \mathbf{R}_x queda como:

$$\mathbf{R}_x = [\mathbf{a}(\theta_0) \dots \mathbf{a}(\theta_{P-1})] \begin{bmatrix} P_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P_{P-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^H(\theta_0) \\ \vdots \\ a^H(\theta_{P-1}) \end{bmatrix} + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (24)$$

$$= \sum_{l=0}^{P-1} P_l \mathbf{a}(\theta_l) \mathbf{a}^H(\theta_l) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (25)$$

donde P_l es la potencia de la fuente l -ésima.

Sea \mathbf{v}_j un autovector ortonormal de \mathbf{R}_x , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x \mathbf{v}_j &= \sum_{l=0}^{P-1} P_l \mathbf{a}(\theta_l) \mathbf{a}^H(\theta_l) \mathbf{v}_j + \sigma^2 \mathbf{v}_j \\ &\stackrel{\wedge}{=} \mathbf{v}_j + \sigma^2 \mathbf{v}_j \\ &= \lambda_j \mathbf{v}_j \end{aligned} \quad (26)$$

donde λ_j es el autovalor correspondiente. Para que se cumpla (26), $\hat{\mathbf{v}}_j$ deberá ser igual a $\alpha \mathbf{v}_j$, donde α es una constante escalar ($\alpha \geq 0$). Dependiendo del valor de α , aparecerán dos conjuntos de autovectores \mathbf{v}_j . En primer lugar, cuando $\alpha > 0$ los autovectores son combinaciones lineales de $\mathbf{a}(\theta_l)$. El otro conjunto es el de los autovectores ortogonales a $\mathbf{a}(\theta_l)$ para todo $l = 0; \dots; P-1$ tal que $\alpha = 0$. Los autovectores cuyos autovalores son grandes ($\alpha > 0$) están en el primer conjunto, y el rango de estos autovectores se denomina *subespacio de señal*, ya que es el espacio del rango de la matriz de respuesta del arreglo \mathbf{A} . Por otro lado, el resto de los autovectores cuyo autovalor es σ^2 ($\alpha = 0$) constituyen el *subespacio de ruido*. Dado que el primer conjunto de autovectores son combinaciones lineales de P vectores independientes $\mathbf{a}(\theta_l)$, el número de autovectores que constituyen el subespacio de señal es siempre P , por lo que el rango de este es P . El rango del subespacio de ruido, que es ortogonal al subespacio de señal, será entonces $M-P$.

3.2.1.1 MUSIC

MUSIC (**M**Ultiple **S**ignal **C**lassification) es un método de subespacio de señal [41] que busca encontrar el arreglo colector ortogonal al subespacio de ruido, puesto que este a su vez es ortogonal al subespacio de señal.

No tiene ningún requerimiento especial en cuanto a la geometría del arreglo. Los elementos de este pueden ser dispuestos siguiendo un patrón regular o irregular y pueden diferir o ser iguales en cuanto a sus características direccionales (amplitud/fase), siempre que guarden idénticas características en lo que hace a la polarización.

La estimación MUSIC es:

$$\hat{\theta} = \arg_{\theta} \max \frac{a^H(\theta)a(\theta)}{a^H(\theta)W W^H a(\theta)} \quad (27)$$

Donde **W** es una matriz cuyas columnas abarcan el subespacio de ruido como:

$$W = [v_P \dots v_{M-1}]$$

donde v_0, \dots, v_{M-1} son autovectores ordenados por el tamaño decreciente de sus correspondientes autovalores. Si θ es una de las DOA, $a(\theta)$ debe ser ortogonal al subespacio de ruido W , de forma que en (27) el denominador se hace cero, dando como resultado un valor máximo. En la mayoría de los casos el procesador desconoce tanto la matriz de correlación como σ . Además, en lugar de la matriz de correlación verdadera se usará una matriz de correlación estimada \hat{R}_x , de modo que lo que se obtiene es una estimación del subespacio de ruido \hat{W} .

A la matriz de correlación \hat{R}_x se la define como:

$$\hat{R}_x = \frac{1}{J} \sum_{t=0}^{J-1} x(t)x^H(t)$$

Debido a los errores en la matriz estimada de correlación los autovalores del subespacio de ruido no van a ser iguales a σ^2 . En este caso se hace necesario determinar la dimensión del subespacio de señal (o la del subespacio de ruido) teniendo en cuenta los autovalores. En [1] (AIC) o en [22] (MDL), aparecen algunos ejemplos de métodos que sirven para estimar P . Una vez estimado en P el número de señales, aquellos autovectores

cuyos autovalores son los P mayores definen el subespacio de señal, y los restantes $M-P$ autovectores hacen lo propio con el de ruido \hat{W}

3.2.1.2 Otros Métodos

Hay otros muchos métodos de subespacio de señal además de MUSIC. Algunas variantes del estimador de MUSIC son el Root-MUSIC [30], el Unitary Root-MUSIC [65], el FB Root-MUSIC [65] y el beamspace MUSIC [6]. Este último puede resolver con MUSIC señales tan próximas como se quiera, siempre que la calibración del arreglo sea la adecuada, de modo que se conozcan con exactitud los vectores directores [64]. Operar en beamspace ofrece una serie de ventajas con respecto a hacerlo en el espacio de los elementos, entre otras la menor complejidad de cálculo, unos umbrales de resolución SNR más bajos y una sensibilidad reducida ante las perturbaciones del sensor. La precisión estará limitada, sin embargo, por la que se haya conseguido en la medición y por cualquier cambio que se produzca en el arreglo colector entre su calibración y la recogida de datos [3]. En el caso del FB Root-MUSIC, el promedio forward-backward produce de forma artificial el efecto de duplicar el número de snapshots, lo que contribuye a aumentar la precisión.

Otro método de subespacio de señal, que no requiere un vector del arreglo colector, es el ESPRIT [21].

Todos los métodos de subespacio de señal tienen en común el proceso de hallar los subespacios de señal y ruido.

3.3 Estimación DOA en Banda Ancha

3.3.1 Formación del Haz por Retardo y Suma

Puesto que las mismas señales llegan a varios sensores, se tiene un número de salidas que representan mezclas de las mismas fuentes, pero con diferentes retardos que dependen de las posiciones relativas del sensor con respecto a las de origen de la señal. Al proceso por el cual se forma la señal a partir de una fuente que procede de una dirección específica (llamada *dirección guía*), combinando las salidas del sensor [5, 45], se le llama *formación del haz*. Puede considerarse como un filtrado pasabanda espacial en el campo

de la señal de propagación, ya que sólo pasan las señales que provienen de la dirección guía y se suprimen todas las otras, incluyendo el ruido (ver la Figura 6)

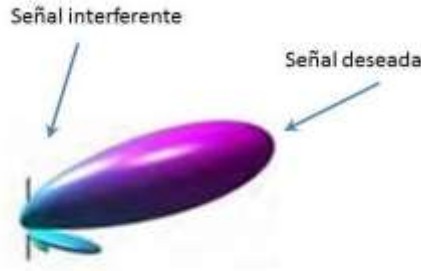


Figura 6: Formación del haz en la dirección deseada

Para sumar coherentemente la señal que proviene de la dirección guía, es necesario alinear el centro de fase de la señal retardando la salida de cada uno de los sensores. El nombre de “*formación de haz por retardo y suma*” (“DS” en abreviatura inglesa) proviene de este tipo de procesamiento.

La salida para la formación DS del haz en la dirección $\vec{\alpha}_0$, se calcula mediante:

$$z\left(t; \vec{\alpha}_0\right)=\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} w_m x_m\left\{t+\left(\vec{r}_m \cdot \vec{\alpha}_0\right)\right\} \quad (28)$$

donde w_m es una ponderación que se aplica a los M sensores del arreglo (ver la Figura 7)

Cuando hay una sola fuente desde la dirección $\vec{\alpha}$,

$$x_m(t)=s\left\{t-\left(\vec{r}_m \cdot \vec{\alpha}\right)\right\}$$

la salida del haz formado se convierte en:

$$z\left(t; \vec{\alpha}_0\right)=\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} w_m s\left\{t-\vec{r}_m \cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\alpha}_0\right)\right\} \quad (29)$$

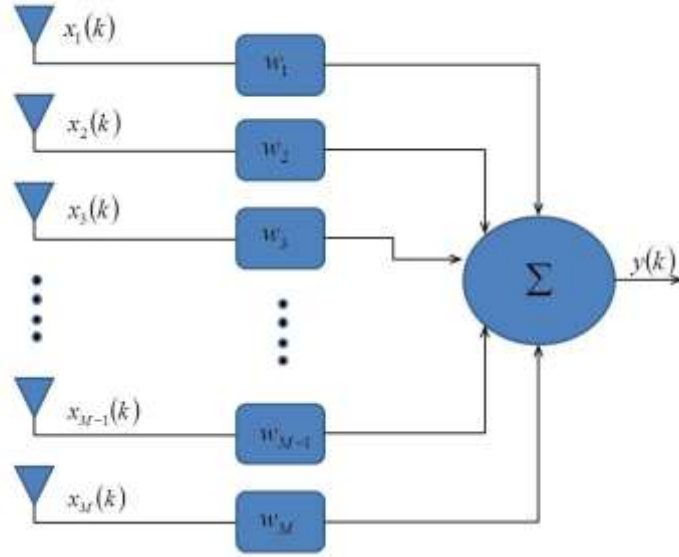


Figura 7: Formación del haz en banda estrecha

En ese caso, la mayor energía será la que corresponde al haz de la señal conformada para la DOA correcta. La suma sólo será coherente si la dirección de formación del haz $\vec{\alpha}_0$ coincide con la del vector lentitud $\vec{\alpha}$ [39] En ese caso, la energía correspondiente a la señal cuyo haz se ha formado, alcanzará su mayor valor en la DOA correcta.

Sin embargo, la formación DS del haz presenta algunas desventajas. En primer lugar, la anchura pasabanda en el dominio del número de ondas es relativamente amplia. Su resolución es la misma que la que da el análisis de Fourier en el dominio espacial, es decir, pobre. Como en todos los métodos de Fourier, el ancho del lóbulo principal es inversamente proporcional a la longitud del arreglo de sensores. A menos que la línea del arreglo sea lo suficientemente grande, su resolución Rayleigh será muy baja y no resultará adecuado para formar haces de alta resolución. En segundo lugar, requiere de un gran número de operaciones de cálculo. La complejidad computacional de la formación DS del haz es $O(n^3)$ para n sensores, n direcciones de formación de haces y n muestras. Sin embargo, y dado que es posible utilizar independientemente del ancho de banda de las fuentes, se le puede emplear para estimar la DOA en señales de banda ancha.

3.3.2 Subespacio de Señal

En la sección 2.3, se explicó la diferencia entre banda estrecha y banda ancha [29] Si la señal origen es de banda ancha, el retardo no puede aproximarse por un desplazamiento de fase, y esto hace que no se cumpla la propiedad de rango uno. Sin embargo, en el dominio temporal de la frecuencia, se puede representar la salida del sensor en un formato matricial-vectorial, como señales de banda estrecha dependientes de la frecuencia.

$$X(w) = A(w, \theta)S(w) + N(w) \quad (30)$$

donde la matriz guía dependiente de la frecuencia es:

$$A(w, \theta) = [a(w, \theta_0) \dots a(w, \theta_{P-1})]$$

y el vector del arreglo colector dependiente de la frecuencia es:

$$a(w, \theta_l) = [e^{-jw\tau_0(\theta_l)} \dots e^{-jw\tau_{M-1}(\theta_l)}]^T$$

Los métodos de estimación de la DOA en banda ancha pueden dividirse en dos grupos, en función de si se realiza, o no, una descomposición en banda estrecha (los métodos de [7, 8, 58], por ejemplo, no utilizan la descomposición)

Fijando la frecuencia en (30), se pueden utilizar los métodos de subespacio de señal de banda estrecha, como por ejemplo los métodos [10, 20, 33, 66, 67] Mediante filtrado pasabanda o DFT, se puede hacer una descomposición de banda estrecha que permita obtener las salidas del sensor para una frecuencia temporal fija. Sin embargo, puesto que la señal es de banda ancha, se tiene que repetir el método (por ejemplo, MUSIC) para cada uno de los múltiples componentes discretos de frecuencia.

La señal descompuesta se puede representar por:

$$X(w_i) = A(w_i)S(w_i) + N(w_i) \quad (31)$$

para $i = 1; \dots; K$

y la correspondiente matriz de correlación es:

$$R_x(w_i) = A(w_i)R_s(w_i)A^H(w_i) + \Sigma(w_i)$$

donde

$$R_s(w_i) = E[S(w_i)S^H(w_i)]$$

Las frecuencias w_i están dentro del espectro donde se solapan todas las bandas de paso de las señales de banda ancha. Hay que tener en cuenta que se tienen K matrices de correlación, correspondientes a las K señales de banda estrecha.

Los métodos del segundo grupo se pueden subdividir a su vez en dos subgrupos, dependiendo de si las señales descompuestas de múltiples frecuencias se utilizan de forma independiente o si se generan nuevas estadísticas de forma coherente desde varios grupos de frecuencias.

3.3.2.1 Métodos Incoherentes

Los métodos incoherentes utilizan de forma independiente las K señales descompuestas. Asumiendo que estas son de banda estrecha, se pueden aplicar los métodos correspondientes de forma independiente. La estimación final resulta ser la media de los resultados independientes [54, 18]

Pongamos por ejemplo el estimador MUSIC incoherente (IMUSIC):

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^K \frac{a^H(w_i, \theta) a(w_i, \theta)}{a^H(w_i, \theta) W_i W_i^H a(w_i, \theta)} \quad (32)$$

W_i es el subespacio de ruido a la frecuencia w_i .

Para estimar las DOA correspondientes a cada una de las frecuencias se puede utilizar cualquier técnica de banda estrecha en lugar de MUSIC.

Los métodos incoherentes funcionan bien en situaciones favorables, es decir, cuando las señales están bien separadas y la SNR es alta. Sin embargo, dado que la estimación final es el promedio de los resultados de todas las frecuencias discretas, una sola muestra que dé un valor distante de las demás puede degradar el rendimiento del estimador [10] y, cuando haya incoherencia entre las frecuencias, aunque se procesen más frecuencias discretas no se conseguirá mejorar significativamente el resultado obtenido. Para el caso en que la SNR sea baja, el tener más frecuencias discretas podría incluso degradar el rendimiento del estimador. Como alternativa para superar estos problemas se proponen los métodos coherentes.

3.3.2.2 Métodos Coherentes

El primer método coherente fue propuesto en 1985 por Wang y Kaveh [10] En su trabajo anunciaron el *Método Coherente de Subespacio de Señal* (CSSM) Desde entonces se han propuesto diversas versiones de CSSM. Pueden verse algunos ejemplos en [20, 67] Más recientemente se presentó un método coherente que difiere ligeramente, y que se conoce como WAVES [66]

3.3.2.2.1 CSSM

CSSM fue la primera aproximación a promediar las matrices de correlación de varias frecuencias discretas de un modo coherente [10] Puesto que los subespacios de señal y ruido dependen de la frecuencia, para sumar las matrices de correlación de forma coherente es necesario un pre-procesamiento llamado *enfoque*.

Enfoque es el proceso por el que, antes de ser promediadas, se transforman las matrices de correlación de distintas frecuencias discretas, por medio de una matriz de transformación que recibe el nombre de *matriz de enfoque*.

Sea \mathbf{R}_i la matriz de correlación de $\mathbf{X}(\mathbf{w}_i)$ La matriz general de correlación es:

$$\mathbf{R}_{gen} = \sum_{i=1}^K \alpha_i \mathbf{T}_i \mathbf{R}_i \mathbf{T}_i^H \quad (33)$$

donde α_i es el peso y \mathbf{T}_i la matriz de enfoque para w_i , que se obtiene de:

$$\min_{\mathbf{T}_i} \left\| \mathbf{A}(w_0, \theta_f) - \mathbf{T}_i \mathbf{A}(w_i, \theta_f) \right\|_F \quad (34)$$

en el que θ_f es el conjunto de ángulos llamados *ángulos de enfoque*. En otras palabras, la *matriz de enfoque* es una matriz de transformación que convierte la matriz de respuesta del arreglo con DOA θ_f a la frecuencia w_i , en otra matriz a la frecuencia w_0 . Asumiendo que la covarianza del ruido a la frecuencia w_i es:

$$\sum(w_i) = \sigma^2(w_i) \mathbf{I}$$

y puesto que la matriz de correlación a la frecuencia w_i es:

$$R_i = A(w_i, \theta) R_s(w_i) A^H(w_i, \theta) + \sigma^2(w_i) I$$

si $\theta_f = \theta$ y

$$\|A(w_0, \theta_f) - T_i A(w_i, \theta_f)\|_F \cong 0$$

la matriz general de correlación es:

$$\begin{aligned} R_{gen} &= \sum_{i=1}^K T_i R_i T_i^H \\ &= \sum_{i=1}^K T_i \{A(w_i, \theta_f) R_s(w_i) A^H(w_i, \theta_f) + \sigma^2(w_i) I\} T_i^H \\ &\cong A(w_0, \theta_f) \sum_{i=1}^K R_s(w_i) A^H(w_0, \theta_f) + \sum_{i=1}^K \sigma^2(w_i) T_i T_i^H \end{aligned} \quad (35)$$

La matriz general de correlación (35) tiene exactamente la misma estructura que la matriz de correlación de señales de banda estrecha a la frecuencia w_0 , excepto porque la matriz covarianza del ruido no es más una matriz identidad. Por lo tanto a \mathbf{R}_{gen} se le puede aplicar un método de subespacio de señal de banda estrecha.

El rendimiento del CSSM depende de cuánto se aproxime la matriz general de correlación (33) a (35). Las matrices de enfoque \mathbf{T}_i y los ángulos de enfoque θ_f juegan un papel muy importante a la hora de minimizar el error de enfoque, es decir, la diferencia entre \mathbf{R}_{gen} y \mathbf{R}_0 .

Una matriz de enfoque bien conocida es la *matriz de transformación del subespacio de señal* (SST) [42]. La matriz SST es óptima en el sentido que minimiza la pérdida de enfoque, que se define como la relación de SNR antes y después de las operaciones de enfoque.

La pérdida de enfoque g es [26]

$$g = \frac{\text{tr} \left\{ R_n^{-1} \sum_{i=1}^K T_i A(w_i, \theta) R_s(w_i) A^H(w_i, \theta) T_i^H \right\}}{\text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^K A(w_i, \theta) R_s(w_i) A^H(w_i, \theta) \right\}}$$

donde

$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^K \sigma^2(w_i) T_i T_i^H}{\sum_{i=1}^K \sigma^2(w_i)}$$

Se demuestra fácilmente que $g=1$ cuando $T_i T_i^H$ es independiente de w_i [42]

La matriz de enfoque del subespacio rotacional de la señal (RSS) propuesta en [26], proporciona un tipo de matrices SST, puesto que $T_i T_i^H = I$ [42]

Una vez determinado el ángulo de enfoque θ_f , se puede hallar la matriz RSS T_i de enfoque como:

$$\min_{T_i} \|A(w_0, \theta_f) - T_i A(w_i, \theta_f)\|_F \quad (36)$$

para $i=1, \dots, K$, siempre que $T_i T_i^H = I$

La solución al problema de optimización de arriba es:

$$T_i = V_i U_i^H \quad (37)$$

donde las columnas de \mathbf{U}_i y \mathbf{V}_i son vectores singulares de izquierda y derecha de

$$A(w_0, \theta_f) A^H(w_i, \theta_f) [26]$$

El problema se convierte, por tanto, en cómo encontrar los ángulos de enfoque θ_f que deberían ser los mismos que la DOA de la señal, que nos es desconocida. Las técnicas de estimación DOA de baja resolución se utilizan por lo general, para encontrar los ángulos de enfoque, que tienen que ser suficientemente próximos a las DOA verdaderas. Sin embargo, algunas DOA que se encuentran muy próximas unas a otras no se pueden resolver mediante este proceso. Además, a diferencia de los valores iniciales de algunos métodos iterativos, los ángulos de enfoque no necesariamente conducen a una solución correcta. Para lograr buenas estimaciones estos deben ser próximos a la DOA verdadera, pero, si no son iguales a esta y la frecuencia de enfoque no está en el centro de la banda de la señal, la desviación nunca tenderá a cero. El sesgo es un factor muy crítico en los métodos de alta resolución y constituye la principal desventaja del CSSM.

3.3.2.2 BICSSM

BICSSM son las iniciales de **B**eamforming-**I**nvariante **C**SSM [20] Este método es similar al CSSM en el sentido de que utiliza una matriz de transformación. La diferencia con respecto a este es que la matriz de transformación no minimiza el error entre subespacios de señal, sino entre haces de múltiples rangos de frecuencia. Para hallar las matrices de transformación, BICSSM tiene que encontrar los vectores que asignen peso, para con ellos formar los haces t_i y t_j , y que satisfagan:

$$\min_{t_i, t_j} \int_{\Omega} \rho(\vec{\alpha}) \left| t_i^H a_i(\vec{\alpha}) - t_j^H a_j(\vec{\alpha}) \right|^2 d\vec{\alpha}$$

donde Ω es el campo de visión (FOV) y $\rho(\vec{\alpha})$ es una función de ponderación. Si se fija a

la frecuencia de referencia w_0 como frecuencia de enfoque en CSSM, entonces el peso correspondiente para la formación del haz es:

$$\min_{t_j} \int_{\Omega} \rho(\vec{\alpha}) \left| t_0^H a_0(\vec{\alpha}) - t_j^H a_j(\vec{\alpha}) \right|^2 d\vec{\alpha}$$

Para formar un espacio de haces M -dimensional se utiliza como referencia el peso de formación del haz $\hat{M} \left(P < \hat{M} < M \right)$

La matriz de transformación $\hat{M} \times M$ para cada frecuencia i viene dada por:

$$T_i = \begin{bmatrix} t_{i,1}^H \\ \vdots \\ t_{i,\hat{M}}^H \end{bmatrix}$$

donde:

$$\min_{t_i, t_{\hat{m}}} \int_{\Omega} \rho(\vec{\alpha}) \left| t_{0,\hat{m}}^H a_0(\vec{\alpha}) - t_{i,\hat{m}}^H a_i(\vec{\alpha}) \right|^2 d\vec{\alpha} \quad (38)$$

para $\hat{m} = 0, \dots, \hat{M} - 1$

Rescribiendo (38) de forma similar a CSSM,

$$\min_{T_i} \int_{\Omega} |T_0 a_0(\vec{\alpha}) - T_i a_i(\vec{\alpha})|^2 d\vec{\alpha}$$

BICSSM minimiza la diferencia entre los haces de diferentes frecuencias dentro del FOV, para evitar depender de los requerimientos del ángulo de enfoque. Una vez hallados todas las T_i 's se genera la matriz general de correlación del siguiente modo:

$$R_{gen} = \sum_{i=1}^K w_i T_i R_i T_i^H$$

y puesto que en el FOV, $T_0 a_0(\vec{\alpha}) \cong T_i a_i(\vec{\alpha})$, la matriz general de correlación queda como:

$$R_{gen} \cong B_0 \left(\sum_{i=1}^{K-1} w_i R_i(w_i) \right) B_0^H$$

donde $B_0 = T_0 A_0$. Ahora se le puede aplicar MUSIC de banda estrecha a la matriz general de correlación con el arreglo colector igual a $T_0 a_0(\vec{\alpha})$

El peso de referencia para la formación del haz T_0 juega aquí el mismo papel importante que los ángulos de enfoque en CSSM. Por lo general para T_0 se utilizan los pesos de formación del haz hacia las M direcciones uniformemente distribuidas en el FOV. El conformador de haces de referencia debe tener lóbulos laterales pequeños fuera del campo visual (FOV), ya que los errores entre haces se minimizan sólo dentro del mismo. Además, el patrón del haz no debería variar entre los componentes de frecuencia. Aunque BICSSM es capaz de evitar el requisito del ángulo de enfoque, puede que en función de la geometría del arreglo, no exista un conformador de referencia que satisfaga ambas condiciones.

3.3.2.2.3 WAVES

El método llamado *Promedio Ponderado de los Subespacios de Señal* (WAVES) es, como su nombre indica, un método de subespacio de señal [66] que utiliza una matriz de pseudodatos proveniente del método llamado de *Ajuste Valorado del Subespacio* (WSF) [16]

La matriz de enfoque T_i puede ser tanto la de CSSM como la de BICSSM [20]
 En el caso de que la señal y el ruido tengan una distribución gaussiana, el elemento k de la diagonal de la matriz de ponderación P_i es [16]

$$[P_i]_{(k,k)} = \frac{\lambda_{i,k} - \sigma_n^2}{\sqrt{\lambda_{i,k} \sigma_n^2}}$$

Donde $\lambda_{i,k}$ es el k mayor autovalor de R_i y σ_n^2 es la potencia de ruido, que se asume constante sobre los rangos de frecuencia.

WAVES encuentra el subespacio de ruido U_N de forma específica a una frecuencia normalizada, haciendo un SVD a partir de la matriz de pseudodatos \mathbf{Z} , que es una matriz $M \times K P$

$$\mathbf{Z} = [T_1 F_1 P_1 \quad T_2 F_2 P_2 \quad \dots \quad T_K F_K P_K]$$

$$\mathbf{Z} = [U_S \quad U_N] \begin{bmatrix} \sum_S & 0 \\ 0 & \sum_N \end{bmatrix} [V_S \quad V_N]^H$$

El subespacio U_N puede ser utilizado, en lugar del subespacio de ruido, en cualquiera de los métodos de subespacio de señal en banda estrecha. Si, por ejemplo, se usa un estimador MUSIC [41], en (27) puede ir U_N en lugar de W .

WAVES es similar a CSSM, ya que explota el subespacio de ruido de la matriz general de correlación:

$$R_{gen} = \sum_{i=1}^K T_i \{F_i P_i P_i^H F_i^H\} T_i^H$$

Sin embargo trabaja mejor que éste, puesto que para generar una matriz de correlación general utiliza los subespacios ponderados de la señal en lugar de utilizar directamente las salidas de los sensores.

Si se extrae T_i de BICSSM, WAVES no necesita ángulos de enfoque. Pero el desempeño del estimador es mejor cuando T_i proviene de CSSM y tiene buenos ángulos de enfoque [66]

Capítulo 4

Aplicación de los Algoritmos de Super-Resolución

Los nuevos métodos de transmisión en banda ancha necesitan a su vez de herramientas de radio-monitorización actualizadas que adopten un papel clave a la hora de detectar direcciones. Los buscadores de dirección convencionales analizan la señal en un canal de frecuencia previamente seleccionado; tanto el escaneo como disponer de una pantalla que muestre el espectro sirven de ayuda a la hora de seleccionar el canal de interés.

Sin embargo cuando tratamos con banda ancha y señales cortas, solo los buscadores de dirección de un número importante de canales de frecuencia cuasi-simultáneos, permiten una evaluación rápida de esos complicados escenarios radio. Esto se aplica, en especial, para el caso de señales cortas y en aquellas con superposición espectral.

Los métodos DF convencionales se basan en la suposición de que el canal de la frecuencia de interés tiene una sola onda dominante. O dicho de otro modo, la mayor parte de ellos asumen que una frecuencia determinada está ocupada exclusivamente por el transmisor que interesa. Sin embargo, si hay otros transmisores operando en la misma frecuencia, la búsqueda de direcciones se ve afectada por el problema conocido como *interferencia co-canal*. En este caso, el resultado de la DF dependerá de la relación de nivel de los transmisores. Si uno de ellos es claramente más potente que los demás, su dirección se mostrará con bastante precisión. Si por el contrario, los transmisores tienen niveles similares, el resultado de la DF será, por lo general, incorrecto.

Otros factores que influyen son los que se mencionan a continuación:

- Solapamiento espectral (por ej. en CDMA, utilizado por el estándar UMTS, varias estaciones transmiten señal simultáneamente en el mismo rango de frecuencia)
- Interferencias de gran amplitud (por ej. interferencia electromagnética)
- Propagación multi-trayecto (por ej. en el caso de las reflexiones producidas por los edificios)

La interferencia co-canal es muy frecuente en la práctica. De hecho es una característica de los métodos de transmisión:

- En el rango de HF, las características de propagación cambian continuamente. Las emisiones a veces pueden viajar mucho más lejos de lo previsto inicialmente y, por tanto, ser recibidas en áreas donde otra estación transmite en la misma frecuencia.
- Los dispositivos electrónicos defectuosos pueden interferir electromagnéticamente en la frecuencia de los transmisores.
- En redes de frecuencia única, como las que se utilizan en DAB / DVB, múltiples transmisores transmiten la misma señal en la misma frecuencia desde diferentes posiciones. Lo hacen para mejorar la calidad de transmisión.
- A veces, se interfiere intencionalmente a ciertos transmisores. En este caso, se envía una señal interferente en la misma frecuencia.

Como consecuencia de lo anterior los resultados de las DF carecen de utilidad debido a los errores que se producen.

La tecnología DF convencional ofrece para ello dos soluciones:

- Si el componente interferente es menos potente que el componente deseado de la señal, se puede minimizar el error DF dimensionando adecuadamente el buscador de direcciones –seleccionando una apertura de antena que sea lo suficientemente grande-
- Si el componente interferente es igual o mayor que el componente deseado de la señal, se pueden tomar portadoras separadas de señales no correladas utilizando DF de alta resolución en banda ancha. Esto permite beneficiarse de las diferencias espectrales de las señales.

Los métodos DF de super-resolución que, como su nombre indica, son capaces de resolver un campo de ondas con múltiples señales en la misma frecuencia, ofrecen una solución sistemática a este problema, permitiendo calcular el número de ondas que

intervienen y su ángulo de incidencia, lo que se consigue bien basándose en el modelo, mediante el método de máxima probabilidad (ML), o por medio del análisis de los componentes principales (PCA) de los datos de la antena.

El número de señales que son capaces de manejar con precisión dependerá del ángulo de incidencia y de la relación señal/ruido.

4.1 Algoritmos

4.1.1 MUSIC

Los métodos MUSIC y Root-MUSIC son dos algoritmos basados en subespacio, que utilizan las propiedades de la descomposición en valores y vectores propios de la matriz de covarianza. Separan el espacio vectorial en dos subespacios: los correspondientes a la señal y al ruido.

El método MUSIC fue desarrollado originalmente por Schmidt [1] para la estimación del ángulo de llegada de las señales a un arreglo de antenas. Root-MUSIC es una derivación del MUSIC y está restringido a arreglos lineales equiespaciados.

No hay mucha diferencia entre el algoritmo desarrollado por Pisarenko y el método MUSIC. Mientras que el de Pisarenko conlleva la proyección de los vectores de señal en un subespacio de ruido particular generado por un único vector, el método MUSIC proyecta el vector de señal en un subespacio de ruido conformado por más de un vector. El número de ondas de llegada se estima a través de la consideración del número de valores propios mayores que σ_0 (los llamados autovalores principales), como muestra de forma esquemática la Figura 8.

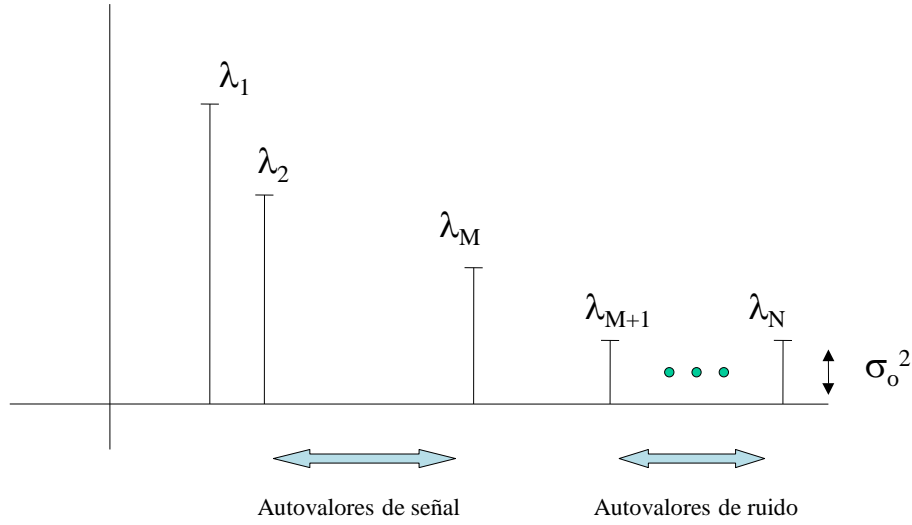


Figura 8: Magnitud de los autovalores asociados con los subespacios de señal y ruido

En un caso práctico, el salto que hay entre el último autovector del subespacio de señal (λ_M en la Figura 8) respecto al primer vector propio del subespacio de ruido (λ_{M+1}), es muy significativo y no hay excesivos problemas para discriminar el número de ondas de llegada (M en la figura). Los problemas aparecen cuando la SNR es baja (por lo general menor de 10 dB). En este caso, para poder estimar el número de ondas de llegada, hay que recurrir a criterios estadísticos tales como AIC (*Criterio de Información de Akaike*) [1, 17] ó MDL (*Minimum Description Length*) [17, 22]

Describiremos a continuación el algoritmo MUSIC.

P_{noise} caracteriza el operador proyección sobre el subespacio de ruido:

$$P_{noise} = E_{noise} E_{noise}^H = I - P_{sig} \quad (39)$$

Definiendo el vector \mathbf{w} (vector de apuntamiento) del siguiente modo:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega} \\ \vdots \\ e^{j(n-1)\omega} \end{bmatrix} \quad (40)$$

lo proyectamos, a partir de (39), sobre el subespacio de ruido.

$$\mathbf{w}^H \mathbf{P}_{\text{noise}} \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{E}_{\text{noise}} \mathbf{E}_{\text{noise}}^H \mathbf{w} \quad (41)$$

Como los vectores de apuntamiento asociados al subespacio de señal son ortogonales al subespacio de ruido, (41) se ha de anular para las frecuencias que hacen $\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{i}$. Definiendo la función Pseudoespectro MUSIC del siguiente modo:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{MU}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\mathbf{w}^H \mathbf{P}_{\text{noise}} \mathbf{w}} = \frac{1}{\mathbf{w}^H \mathbf{E}_{\text{noise}} \mathbf{E}_{\text{noise}}^H \mathbf{w}} \quad (42)$$

esta exhibirá picos para las frecuencias en las que $\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{i}$. Obsérvese que el procedimiento a seguir para determinar las frecuencias que caracterizan el vector de señal no es muy diferente al del método de Pisarenko.

4.1.2 Root-MUSIC

El método Root-MUSIC puede considerarse como una derivación del algoritmo MUSIC, pues parte de la función Pseudoespectro $\hat{\mathbf{P}}_{\text{MU}}$ (42). Ambos métodos son similares existiendo, esencialmente, dos diferencias:

1. El algoritmo MUSIC calcula la función pseudoespectro procedente del subespacio de ruido $\mathbf{P}_{\text{noise}}$, estimando las frecuencias ω_i como aquellos valores del vector \mathbf{w} en los que existe un pico de la función pseudoespectro. En el algoritmo Root-MUSIC, sin embargo, las frecuencias ω_i son estimadas como las raíces de un polinomio formado a partir de los autovectores que engendran el subespacio de ruido, tal y como se indicará más adelante.
2. Mientras el método MUSIC es aplicable para cualquier configuración geométrica del arreglo, el Root-MUSIC está restringido a arreglos lineales de sensores equiespaciados.

La función de búsqueda (Pseudoespectro) en la que se basa el algoritmo MUSIC para estimar las frecuencias ω_i , puede expresarse en función de $e^{j\omega}$ de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{MU}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\mathbf{w}^H(e^{j\omega}) \mathbf{E}_{\text{noise}} \mathbf{E}_{\text{noise}}^H \mathbf{w}(e^{j\omega})} \quad (43)$$

Donde $\mathbf{E}_{\text{noise}}$ es una matriz de dimensión $N \times (N-M)$, cuyas columnas son los $N-M$ autovectores de ruido de \mathbf{R}_x , y el vector \mathbf{w} se define como en (40)

El algoritmo Root-MUSIC propone, básicamente, realizar el siguiente cambio de variable:

$$z = e^{j\omega} \quad (44)$$

Atendiendo a (44), el denominador en (43) se desarrolla como un polinomio en z de grado $2N-2$. Para ello, se define la función $E_i(z)$ del siguiente modo:

$$E_i(z) = e_i[0] + e_i[1]z^{-1} + e_i[2]z^{-2} + \dots + e_i[N-1]z^{-(N-1)} \quad (45)$$

Donde $e_i[n]$ son las componentes del autovector e_i de la matriz de covarianza (columna i -ésima de la matriz $\mathbf{E}_{\text{noise}}$)

El denominador de la función pseudoespectro se desarrolla en términos de z , del siguiente modo:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{E}_{\text{noise}} \mathbf{E}_{\text{noise}}^H \mathbf{w} = \sum_{i=M+1}^N E_i(z) E_i^*(z) \quad (46)$$

Dada la ortogonalidad de los subespacios de señal y ruido, esta función se anula cuando $z = e^{j\omega_i} \quad (i = 1, 2, \dots, M)$

Rao [46] demuestra que las raíces del polinomio

$$\hat{P}_{MU}^{-1}(z) = \sum_{i=M+1}^N E_i(z) E_i^*(1/z^*) \quad (47)$$

tienen multiplicidad 2. Es decir que existen $N-1$ valores distintos z_i que verifican:

$$\hat{P}_{MU}^{-1}(z_i) = 0$$

Se debe adoptar algún criterio para la estimar las M frecuencias ω_i de entre las $N-1$ raíces de \hat{P}_{MU}^{-1} . Como las soluciones buscadas deben satisfacer:

$$Z_m = e^{j\omega_m} \quad ; \quad m = 1, \dots, M \quad (48)$$

se escogerán aquellas soluciones cuyo módulo esté más próximo al círculo unidad (valor absoluto uno) para que, de este modo, se satisfaga (48)

4.1.3 Matrix-Pencil

Matrix Pencil es una poderosa herramienta que ha sido aplicada con éxito en las áreas de separación de fuentes ocultas y procesamiento de los arreglos. Su algoritmo se basa en mediciones de los canales en el dominio de la frecuencia.

Este método permite estimar los parámetros que caracterizan una secuencia conformada por N muestras contaminadas con ruido. Se denota como \mathbf{x} a dicha secuencia que, para el elemento i -ésimo, se define del siguiente modo:

$$x_i = s_i + \eta_i = \sum_{l=1}^M |h_l| e^{((\alpha_l + j\omega_l)(i-1) + \phi_l)} \quad i = 1, \dots, N \quad (49)$$

En (49) η_i modela la componente de ruido que contamina s_i . Obsérvese que el vector de datos \mathbf{x} es la suma de M exponenciales complejas (cisoides). Cada cisoides se caracteriza por tres parámetros: α -factor de amortiguamiento-; ω -frecuencia-; y h -amplitud compleja-. Al número complejo $\alpha + j\omega$ se le denomina “frecuencia compleja”.

$$h_l = |h_l| e^{j\phi_l}$$

$$z_l = e^{(\alpha_l + j\omega_l)} \quad (50)$$

Sustituyendo (50) en (49):

$$x_i = s_i + \eta_i = \sum_{l=1}^M h_l z_l^{(i-1)} + \eta_i \quad i = 1, \dots, N \quad (51)$$

Aquí el objetivo es caracterizar por las M exponenciales complejas que aparecen en (51), determinando los parámetros $h_l, z_l, l = 1, \dots, M$ introducidos en (50).

En el método Matrix Pencil, que se aprovecha de la rica estructura algebraica que subyace en el modelo de señal (51), se pasa de tener que resolver un problema no lineal a calcular los valores propios de un problema generalizado de valores/vectores propios.

En el desarrollo que viene a continuación se asume que sólo se dispone de una muestra del vector \mathbf{x} . Más adelante se indicará la forma de adaptar el algoritmo para tratar con múltiples muestras.

En principio se considera que \mathbf{x} está libre de ruido, esto es, $\mathbf{x}=\mathbf{s}$. Después se contaminarán las muestras y se expondrá el procedimiento a seguir para determinar (50) en un escenario ruidoso.

4.1.3.1 Datos libres de ruido

Se describe en (51) la parte libre de ruido:

$$s_i = \sum_{l=1}^M h_l z_l^{(i-1)} \quad i = 1, \dots, N \quad (52)$$

Para poder aplicar el algoritmo MP se tienen que colocar estratégicamente las muestras \mathbf{s}_i $i=1,..N$ en dos matrices \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 , constituyendo de este modo las denominadas “Matrices Pencil”:

$$[\mathbf{G}_1]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_L \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{N-L} & s_{N-L+1} & \dots & s_{N-1} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$[\mathbf{G}_2]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} s_2 & s_3 & \dots & s_{L+1} \\ s_3 & s_4 & \dots & s_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{N-L+1} & s_{N-L+2} & \dots & s_N \end{bmatrix} \quad (54)$$

Nótese cómo se han formado \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 . Es como si dividiéramos la secuencia de datos original, de tamaño N , en secuencias solapadas de un tamaño L menor. Con estas secuencias reducidas se irán formando las filas de \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 . L es el parámetro del haz (“*Pencil parameter*”) El parámetro del haz es una especie de “sintonizador”, es decir que ajustándolo convenientemente se consigue aminorar el efecto perturbador que el ruido introduce sobre las muestras no contaminadas. El valor de L está limitado por debajo por el número de cisoides (M) y, por arriba, por el número de datos que conforman la secuencia original (N) En principio, $L < N$. El parámetro Pencil es un dato que introduce el usuario. De [60] se extrae que Matrix Pencil es más sensible al ruido cuando el

parámetro Pencil es igual a M o a $N - M$. Un valor típico y recomendado, y que a su vez se muestra como la mejor opción, es $L=2/3N$. En realidad todos aquellos valores que satisfagan $N/3 \leq L \leq 2N/3$ se consideran una buena elección.

Definido L se construye el siguiente haz de matrices para luego analizar su rango:

$$\mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1 \quad (55)$$

Se llama rango de una matriz al mayor número de filas o columnas que son linealmente independientes, o lo que es lo mismo, a la dimensión del espacio vectorial que engendran. En (55) ξ es un escalar complejo. Para estudiar el rango del haz:

$$\mathbf{MP} \equiv \mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1$$

es conveniente realizar la factorización que se indica a continuación. Se definen las siguientes matrices:

$$\mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_M \\ z_1^2 & & z_M^2 \\ \cdots & & \cdots \\ z_1^{N-L-1} & \cdots & z_M^{N-L-1} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{Z}_R = \begin{bmatrix} z_1^{L-1} & z_1^{L-2} & \cdots & 1 \\ z_2^{L-1} & & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots & \\ z_M^{L-1} & z_M^{L-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{H} = \text{diag} \{ h_1, h_2, \cdots, h_M \} \quad (58)$$

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \{ z_1, z_2, \cdots, z_M \} \quad (59)$$

Teniendo en cuenta (56) – (59), \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 se pueden desarrollar del siguiente modo:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{Z}_L \mathbf{H} \mathbf{Z}_R \quad (60)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{Z}_L \mathbf{H} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_R \quad (61)$$

Sustituyendo (60) y (61) en (55), el haz de matrices admite la siguiente factorización:

$$\mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1 = \mathbf{Z}_L \mathbf{H} (\mathbf{Z} - \xi \mathbf{I}_M) \mathbf{Z}_R \quad (62)$$

Donde \mathbf{I}_M es la matriz identidad de tamaño $M \times M$. Esta factorización es esencial para entender el fundamento matemático sobre el que se apoya el algoritmo MP.

Si se satisface que $M \leq L \leq N - M$, entonces:

$$\text{rango}(\mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1) = \text{rango}(\mathbf{Z} - \xi \mathbf{I}) \quad (63)$$

Adviértase que, si se cumple (63), resulta inmediato deducir el rango del haz de matrices (55) Estudiar el rango de $\mathbf{Z} - \xi \mathbf{I}$ es trivial. Como \mathbf{Z} es diagonal -ver la expresión (58)- cuando ξ es diferente del valor de cualquiera de los elementos de su diagonal, su rango es M , esto es:

$$(\mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1) = \begin{cases} M & \text{si } \xi_i \neq z_i & i = 1, \dots, M & (a) \\ M - 1 & \text{si } \xi_i = z_i & i = 1, \dots, M & (b) \end{cases} \quad (64)$$

Cuando ξ toma cualquiera de los valores indicados en (64), el rango del haz de matrices se reduce en una unidad. Los valores de ξ que consiguen reducir en uno el rango de (55) son, por definición, los valores propios generalizados del par de matrices $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ Este resultado es la base matemática sobre la que se sustenta el algoritmo MP.

El problema de la búsqueda de valores propios de $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ puede formularse del siguiente modo:

$$(\mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (65)$$

o bien:

$$\mathbf{q}^H (\mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1) = \mathbf{0}^H \quad (66)$$

El superíndice H denota operador “traspuesto complejo conjugado”. \mathbf{p} y \mathbf{q} son los vectores propios generalizados por la derecha del autovalor ξ . Resta calcular los valores propios de (65) para así caracterizar las M cisoides que forman el vector de señal \mathbf{s} .

Se expone el procedimiento a seguir, pero antes nótese que se puede transformar (65) ó (66) en un problema estándar de valores/vectores propios que involucre matrices cuadradas. En efecto, teniendo en cuenta la definición de pseudoinversa de una matriz [35]:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad (67)$$

Multiplicando (65) por \mathbf{G}_1^+ se tiene que:

$$(\mathbf{G}_1^+ \mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{I}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (68)$$

Del mismo modo se puede derivar a los siguientes problemas estándar de valores/vectores propios:

$$(\mathbf{I} - \xi \mathbf{G}_2^+ \mathbf{G}_1) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (69)$$

$$\mathbf{q}^H (\mathbf{I} - \xi \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^+) = \mathbf{0}^H \quad (70)$$

$$\mathbf{q}^H (\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^+ - \xi \mathbf{I}) = \mathbf{0}^H \quad (71)$$

donde $(\mathbf{G}_1^+ \mathbf{G}_2)$ y $(\mathbf{G}_2^+ \mathbf{G}_1)$ son matrices cuadradas de tamaño $L \times L$, y $(\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^+)$ y $(\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^+)$ son así mismo matrices cuadradas, pero de tamaño $(N-L) \times (N-L)$

Resolviendo cualquiera de los problemas (65) – (71) se caracterizan las M cisoides que definen el vector de datos \mathbf{s} . En la Tabla 1 se indican de manera resumida los cuatro problemas estándar de valores/vectores propios que se pueden obtener a partir de (65) y (66)

MATRIZ	Valores Propios $\neq 0$	Valores propios $= 0$
$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^+ & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}_{L \times L}$	$\xi_i = z_i \quad i = 1, \dots, M$	$\xi_n = 0 \quad n = 1, \dots, L - M$
$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_2^+ & \mathbf{G}_1 \end{bmatrix}_{L \times L}$	$\xi_i = z_i^* \quad i = 1, \dots, M$	$\xi_n = 0 \quad n = 1, \dots, L - M$
$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1^+ \end{bmatrix}_{(N-L) \times (N-L)}$	$\xi_i = z_i \quad i = 1, \dots, M$	$\xi_n = 0 \quad n = 1, \dots, N - L - M$
$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2^+ \end{bmatrix}_{(N-L) \times (N-L)}$	$\xi_i = z_i^* \quad i = 1, \dots, M$	$\xi_n = 0 \quad n = 1, \dots, N - L - M$

Tabla 1- Los parámetros que caracterizan las M cisoides que conforman el vector s , pueden ser calculados a partir de los valores propios de los cuatro problemas propuestos en esta tabla

4.1.3.2 Datos Contaminados con ruido

En un caso real las muestras están contaminadas por un cierto nivel de ruido (51) Se demostrará en este punto que el método MP es capaz de extraer las frecuencias complejas que caracterizan la señal contaminada. Las matrices \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 (53) y (54) pasarán a denotarse ahora como \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 . Para definir estas últimas matrices se ha de sustituir en (53) y (54) las muestras \mathbf{s}_i por las muestras ruidosas $\mathbf{x}_i = \mathbf{s}_i + \eta_i$. Una vez caracterizadas \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 , las M frecuencias complejas que definen la señal son los autovalores del siguiente problema generalizado de valores/vectores propios:

$$(\mathbf{D}_2 - \xi \mathbf{D}_1) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (72)$$

o bien:

$$\mathbf{q}^H (\mathbf{D}_2 - \xi \mathbf{D}_1) = \mathbf{0}^H \quad (73)$$

De (72)-(73) y haciendo uso de la matriz pseudoinversa (67), del mismo modo que para el caso libre de ruido, se pueden derivar los cuatro problemas estándar de valores/vectores propios que se indican en la Tabla 1 sustituyendo en la misma las matrices $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ por $\{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2\}$. Con objeto de simplificar todo lo posible la exposición, tomaremos solo uno de los cuatro problemas de la tabla:

$$(\mathbf{D}_1^+ \mathbf{D}_2 - \xi \mathbf{I}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (74)$$

Para extraer los valores propios ξ_m $m=1, \dots, M$ de (72)-(74) se puede optar por una de las dos soluciones que se proponen a continuación:

- Resolver el problema de valores propios generalizados, tal y como se plantea en (72) y (73) A este procedimiento se le denomina como “Solución Generalizada”
- Resolver uno de los cuatro problemas de valores propios “estándar” que se pueden derivar (cualquiera de los indicados en la Tabla 1) A este procedimiento se le conoce como “Solución Estándar”

A continuación se exponen los pasos a seguir según se vaya por un camino u otro.

4.1.3.2.1 Solución Generalizada

\mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 son matrices rectangulares, y en general no tienen rango completo (si fuesen cuadradas, diríamos que son matrices singulares) Por esta razón los algoritmos clásicos para resolver (72) y (73), como por ejemplo la descomposición QZ [9, 35], presentan inestabilidades numéricas. El algoritmo ampliamente aceptado para tratar este tipo de problemas generalizados de valores/vectores propios es la descomposición en valores singulares. Esto se demuestra en [44] y [14]

El teorema de la descomposición en valores singulares establece que toda matriz \mathbf{B} de tamaño $m \times n$ y rango r ($r \leq \min \{m, n\}$) se puede factorizar del siguiente modo:

$$[\mathbf{B}]_{m \times n} = [\mathbf{U}]_{m \times m} [\mathbf{\Sigma}]_{m \times n} [\mathbf{V}^H]_{n \times n} \quad (75)$$

donde “H” denota operador complejo conjugado traspuesto; \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices unitarias, es decir, $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{I}$; y $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz diagonal con r elementos reales no negativos en su diagonal principal y el resto ceros, esto es:

$$[\Sigma]_{m \times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 \\ \hline & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{array} \right] \quad (76)$$

Los elementos de la diagonal principal de Σ se denominan valores singulares o valores propios de \mathbf{B} . Es costumbre colocarlos en orden decreciente, es decir:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0 \quad (77)$$

En (75), los vectores columna de \mathbf{U} , \mathbf{u}_m y de \mathbf{V} , \mathbf{v}_m , se denominan vectores singulares por la izquierda y por la derecha de \mathbf{B} .

Los vectores singulares de \mathbf{B} se relacionan a través de dos problemas estándar de valores/vectores propios:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^H \mathbf{B} - \chi_m \mathbf{I}) \mathbf{r}_m &= \mathbf{0} \\ \sigma_m &= +\sqrt{\chi_m} ; \quad \mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}_m}{\|\mathbf{r}_m\|} ; \quad \mathbf{u}_m = \frac{1}{\sigma_m} \mathbf{B} \mathbf{v}_m \end{aligned} \quad (78)$$

y

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \mathbf{B}^H - \chi_m \mathbf{I}) \mathbf{s}_m &= \mathbf{0} \\ \sigma_m &= +\sqrt{\chi_m} ; \quad \mathbf{u}_m = \frac{\mathbf{s}_m}{\|\mathbf{s}_m\|} ; \quad \mathbf{v}_m = \frac{1}{\sigma_m} \mathbf{B}^H \mathbf{u}_m \end{aligned} \quad (79)$$

Este resultado se volverá a utilizar más adelante.

El rango de \mathbf{G}_1 o \mathbf{G}_2 es M , donde $M \leq J$, siendo $J = \min(m, n)$

La descomposición en valores singulares de cualquiera de estas dos matrices dará como resultado una matriz diagonal Σ de J elementos en la diagonal, con M valores singulares no nulos, es decir:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_J)$$

con:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_M > \sigma_{M+1} = \dots = \sigma_J = 0 \quad (80)$$

Al constituir **D₁** y **D₂**, la presencia del ruido tiene como consecuencia que ambas matrices tiendan a perder su propiedad de bajo rango ($\text{rango}(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2) > M$) En términos algebraicos esto significa que los valores singulares que antes eran cero ahora tomarán unos valores más o menos pequeños pero no nulos (dependiendo del nivel de contaminación o relación SNR) La expresión (80) se convierte ahora en:

$$\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \dots \geq \tilde{\sigma}_M > \tilde{\sigma}_{M+1} > \dots > \tilde{\sigma}_J > 0 \quad (81)$$

donde el símbolo que aparece en (81) indica que los valores de σ en (80) se ven afectados por el ruido. La ecuación (81) da una idea de cómo determinar el número de cisoides que aparecen en (51) Se trata de encontrar un umbral apropiado entre dos valores singulares consecutivos que separe los valores singulares mayores o principales (asociados a la señal), de los menores (asociados a ruido) El número de valores singulares principales será la estimación que se utilice para M .

Se puede demostrar que las matrices que mejor se aproximan (en el sentido de que minimizan el error cuadrático medio) a **G₁** y **G₂**, son las que resultan de truncar las matrices resultantes de la descomposición de valores singulares de **D₁** y **D₂** en dos nuevas matrices, que denotaremos como $\tilde{\mathbf{D}}_1$ y $\tilde{\mathbf{D}}_2$. Estas matrices se obtienen a partir de **D₁** y **D₂** del modo que se expone a continuación. El desarrollo que sigue se hace sobre **D₁**, pero el procedimiento es similar en el caso de **D₂**.

Realizando la SVD de **D₁**, esta se factoriza del siguiente modo:

$$[\mathbf{D}_1]_{m \times n} = [\mathbf{U}_1]_{m \times m} [\mathbf{\Sigma}_1]_{m \times n} [\mathbf{V}]_{n \times n}^H \quad (82)$$

donde la matriz $\mathbf{\Sigma}_1$ se define en función de los valores que tomen m y n , como se indica a continuación:

- Si $m > n$:

$$[\Sigma_1]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_M \end{bmatrix}}^{M \times M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{M+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}}^{(m-M) \times (n-M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (83)$$

La matriz $\tilde{\Sigma}_1$ es diagonal y de tamaño $M \times M$, y $\bar{\Sigma}_1$ es de dimensión $(m-M) \times (n-M)$

- Si $m \leq n$, la matriz Σ_1 en (82) se define como sigue:

$$[\Sigma_1]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_M \end{bmatrix}}^{M \times M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{M+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \end{bmatrix}}^{(m-M) \times (n-M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (84)$$

Adviértase que en (83) y (84) $\bar{\Sigma}_1$ se ha definido de una forma distinta.

Caracterizada Σ_1 , sean $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_{M+1}, \dots, \mathbf{u}_m]$ los vectores columna de \mathbf{U}_1 en (82). \mathbf{u}_i es un vector de m elementos ($\in \mathbf{R}^m$) De forma análoga, los vectores columna de \mathbf{V}_1 se denotan como $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_{M+1}, \dots, \mathbf{v}_n]$, con $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^n$. Teniendo en cuenta estas definiciones, (82) se puede desarrollar como sigue:

$$[\mathbf{D}_1]_{m \times n} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_{M+1}, \dots, \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_{M+1}, \dots, \mathbf{v}_n]^H \quad (85)$$

Desglosando \mathbf{U}_1 y \mathbf{V}_1 en dos nuevas matrices a partir de las M primeras columnas de \mathbf{U}_1 y \mathbf{V}_1 ,

$$[\mathbf{D}_1]_{m \times n} = \left[[\tilde{\mathbf{U}}_1]_{m \times M}, [\bar{\mathbf{U}}_1]_{m \times (m-M)} \right] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{V}}_1]_{n \times M}^H \\ \dots \\ [\bar{\mathbf{V}}_1]_{n \times (n-M)}^H \end{bmatrix} \quad (86)$$

es posible truncar \mathbf{D}_1 y expresarla en términos de $\tilde{\mathbf{D}}_1$ y $\bar{\mathbf{D}}_1$:

$$[\mathbf{D}_1]_{m \times n} = \tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{\Sigma}_1 \tilde{\mathbf{V}}_1^H + \bar{\mathbf{U}}_1 \bar{\Sigma}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^H = \tilde{\mathbf{D}}_1 + \bar{\mathbf{D}}_1 \cong \tilde{\mathbf{D}}_1 \quad (87)$$

De forma análoga:

$$[\mathbf{D}_2]_{m \times n} = \tilde{\mathbf{U}}_2 \tilde{\Sigma}_2 \tilde{\mathbf{V}}_2^H + \bar{\mathbf{U}}_2 \bar{\Sigma}_2 \bar{\mathbf{V}}_2^H = \tilde{\mathbf{D}}_2 + \bar{\mathbf{D}}_2 \cong \tilde{\mathbf{D}}_2 \quad (88)$$

El último paso en (87) – (88) se justifica porque los elementos de la diagonal en $\bar{\Sigma}_i$ son, en general, mucho menores que los elementos de la diagonal de la matriz $\tilde{\Sigma}_i$. En (87) y (88) el superíndice “~” denota matriz truncada asociada a la señal, y el superíndice “—” indica matriz truncada ligada al ruido. De (78) y (79) se tiene que,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_1 \mathbf{v}_i &= \sigma_i \mathbf{u}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, M \\ \bar{\mathbf{D}}_1 \mathbf{v}_j &= \sigma_j \mathbf{u}_j \quad ; \quad j = M + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (89)$$

Esto significa que los M vectores columna de $\tilde{\mathbf{U}}_1$ forman una base ortonormal del espacio imagen de $\tilde{\mathbf{D}}_1$, que es lo que en la literatura, y en especial en los métodos basados en subespacio, se denomina *subespacio de señal*. Por otro lado, los $m-M$ vectores columna de $\bar{\mathbf{U}}_1$ son una base ortonormal del espacio imagen de $\bar{\mathbf{D}}_1$, esto es, del *subespacio de ruido*.

Al reemplazar \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 por sus versiones truncadas $\tilde{\mathbf{D}}_1$ y $\tilde{\mathbf{D}}_2$ lo que se está haciendo es filtrar parte del ruido. Aunque el método del haz de matrices se desarrolla a partir de la señal libre de ruido, gracias a la descomposición en valores singulares es capaz de trabajar también en entornos reales, donde los datos están contaminados.

Una vez truncadas \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 y sentadas las bases matemáticas sobre las que se apoya la descomposición en valores/vectores singulares, vamos a aplicar todo ello al problema concreto de valores/vectores propios generalizado que nos ocupa:

$$(\mathbf{D}_2 - \xi \mathbf{D}_1) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (90)$$

\mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 se definen del siguiente modo:

$$[\mathbf{D}_1]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_L \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_{N-L} & \mathbf{x}_{N-L+1} & \dots & \mathbf{x}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$[\mathbf{D}_2]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_{L+1} \\ \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \dots & \mathbf{x}_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_{N-L+1} & \mathbf{x}_{N-L+2} & \dots & \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad (92)$$

El haz de matrices en curso es de tamaño $(N-L) \times L$, luego en (82)-(88) $m = N-L$ y $n = L$

$$\mathbf{MP} \equiv \mathbf{D}_2 - \xi \mathbf{D}_1$$

Para resolver (90) se define una nueva matriz, que denominaremos *matriz ampliada Pencil* y denotaremos por \mathbf{D} :

$$[\mathbf{D}]_{(N-L) \times (L+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_{L+1} \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \dots & \mathbf{x}_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{x}_{N-L} & \mathbf{x}_{N-L+1} & \mathbf{x}_{N-L+2} & \dots & \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad (93)$$

\mathbf{D} tiene tamaño $(N-L) \times (L+1)$

Sean \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_{L+1} la primera y última fila de \mathbf{D} . Por construcción \mathbf{D} se relaciona con \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 del siguiente modo:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{D}_2] = [\mathbf{D}_1, \mathbf{d}_{L+1}] \quad (94)$$

Ya que \mathbf{D} es de tamaño $m \times n$, $m = (N-L)$ y $n = L+1$, es posible descomponerla en valores singulares y factorizarla de la forma que se indica en (82) Rescribiendo nuevamente aquella expresión:

$$[\mathbf{D}]_{m \times n} = [\mathbf{U}]_{m \times m} [\mathbf{\Sigma}]_{m \times n} [\mathbf{V}^H]_{n \times n} \quad (95)$$

Denotando como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_n$ a los vectores columna de \mathbf{V} , \mathbf{D} pasaría a expresarse del siguiente modo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)^H \quad (96)$$

Sustituyendo (96) en (94) y despejando luego \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 , se tiene que:

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}_1^H \quad (97)$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}_2^H$$

Donde \mathbf{V}_1^H y \mathbf{V}_2^H se obtienen a partir de \mathbf{V} en (95), eliminando la primera y última columna de \mathbf{V} respectivamente.

Para caracterizar \mathbf{V} en (95), se realiza la descomposición del producto de matrices $[\mathbf{D}^H \mathbf{D}]$ en vectores/valores singulares, siguiendo el procedimiento descrito en (78)

Teniendo en cuenta cómo se definen \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 en (97), se va a demostrar que es posible resolver (90) y obtener los autovalores ξ_m $m=1, \dots, M$ caracterizando tan solo las matrices \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 que aparecen en (97), por lo que no es necesario calcular las matrices \mathbf{U} y $\mathbf{\Sigma}$.

En efecto, sustituyendo \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 por sus versiones truncadas $\tilde{\mathbf{D}}_1$ y $\tilde{\mathbf{D}}_2$ (87)-(88), el problema de valores/vectores propios (90) se expresa del siguiente modo:

$$([\tilde{\mathbf{U}}]_{(N-L) \times M} [\tilde{\mathbf{\Sigma}}]_{M \times M} [\tilde{\mathbf{V}}_2^H]_{M \times M} - \xi_m [\tilde{\mathbf{U}}]_{(N-L) \times M} [\tilde{\mathbf{\Sigma}}]_{M \times M} [\tilde{\mathbf{V}}_1^H]_{M \times L}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (98)$$

Multiplicando por la izquierda por $\tilde{\mathbf{U}} \mathbf{\Sigma}$, queda:

$$([\tilde{\mathbf{V}}_2^H]_{M \times L} - \xi_m [\tilde{\mathbf{V}}_1^H]_{M \times L}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (99)$$

Como se quería demostrar, adviértase que en (99) ya no es necesario calcular ni $\tilde{\mathbf{U}}$ ni $\tilde{\Sigma}$.

$\tilde{\mathbf{V}}_2^H$ y $\tilde{\mathbf{V}}_1^H$ son rectangulares. Las subrutinas para resolver problemas generalizados de valores/vectores propios que se encuentran en la literatura requieren hacer uso de matrices cuadradas. Para lograr este propósito podemos transformar (99) en un problema de tamaño $M \times M$ que proporcione los mismos autovalores. Multiplicando por $\tilde{\mathbf{V}}_1$ el problema generalizado (99) se expresa del siguiente modo:

$$\left(\left[\tilde{\mathbf{V}}_2^H \right]_{M \times L} \left[\tilde{\mathbf{V}}_1 \right]_{L \times M} - \xi_m \left[\tilde{\mathbf{V}}_1^H \right]_{M \times L} \left[\tilde{\mathbf{V}}_1 \right]_{L \times M} \right) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (100)$$

Una vez que se han obtenidos los M valores propios de (100), se extraen las frecuencias complejas que caracterizan a la señal \mathbf{s} :

$$\xi_i = Z_i \quad i = 1, \dots, M \quad (101)$$

4.1.3.2.2 Solución Estándar

De los cuatro problemas estándar de valores/vectores propios que se mostraron en la Tabla 1, seleccionamos el siguiente,

$$(\mathbf{D}_1^+ \mathbf{D}_2 - \xi \mathbf{I}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (102)$$

aunque el procedimiento que se va a exponer a continuación es general y puede ser aplicado a cualquiera de los problemas recogidos en la tabla.

Caracterizadas \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 se calcula \mathbf{D}_1^+ (matriz pseudoinversa) Por razones de estabilidad numérica, en vez de usar la definición de matriz pseudoinversa dada en (67), esta matriz se calcula a partir de la descomposición de \mathbf{D}_1 en valores singulares. Una ventaja adicional que supone usar la descomposición en valores singulares, es la de permitir obtener una versión truncada de \mathbf{D}_1^+ (sea $\tilde{\mathbf{D}}_1^+$) filtrando, como se acaba de demostrar, el efecto del ruido.

Para obtener $\tilde{\mathbf{D}}_1^+$, tal y como se indicó en (82) – (87) se ha de descomponer \mathbf{D}_1 en valores singulares (SVD)

$$\left[\mathbf{D}_1 \right]_{(N-L) \times L} = \left[\mathbf{U}_1 \right]_{N-L \times N-L} \left[\Sigma_1 \right]_{N-L \times L} \left[\mathbf{V}_1^H \right]_{L \times L} \quad (103)$$

Los vectores columna de \mathbf{U}_1 y \mathbf{V}_1 se obtienen a partir de los vectores propios de la matriz $[\mathbf{D}_1^H \mathbf{D}_1]$, tal y como quedó dicho en (78) Esta matriz es cuadrada y de tamaño $L \times L$.

A partir de (103) se trunca \mathbf{D}_1 filtrando el ruido y se aproxima por $\tilde{\mathbf{D}}_1$. El procedimiento es el mismo que el seguido en (87) Se rescribe de nuevo esta ecuación:

$$[\mathbf{D}_1]_{m \times n} = \tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{\Sigma}_1 \tilde{\mathbf{V}}_1^H + \bar{\mathbf{U}}_1 \bar{\Sigma}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^H = \tilde{\mathbf{D}}_1 + \bar{\mathbf{D}}_1 \cong \tilde{\mathbf{D}}_1 \quad (104)$$

Una vez substituida \mathbf{D}_1 por $\tilde{\mathbf{D}}_1$, se calcula su pseudoinversa. Para obtener esta matriz, o bien se emplea la expresión (68) o, más fácilmente, nos aprovechamos de la descomposición en valores singulares que acabamos de realizar. En efecto, una vez definidas $\tilde{\mathbf{V}}_1, \tilde{\mathbf{U}}_1$ y $\tilde{\Sigma}_1$, $\tilde{\mathbf{D}}_1^+$ se obtiene del siguiente modo [35]:

$$[\tilde{\mathbf{D}}_1^+]_{L \times (N-L)} = [\tilde{\mathbf{V}}_1]_{L \times M} [\tilde{\Sigma}_1]_{M \times M}^{-1} [\tilde{\mathbf{U}}_1^H]_{M \times (N-L)} \quad (105)$$

Al ser $\tilde{\Sigma}_1$ diagonal, su inversa se define del siguiente modo:

$$\Sigma_1^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_1}, \dots, \frac{1}{\tilde{\sigma}_M} \right) \quad (106)$$

El procedimiento que hemos seguido hasta ahora asume que sólo se dispone de una muestra temporal, o snapshot, de la señal \mathbf{x} (\mathbf{x}_1 , $i=1, \dots, N$)

El algoritmo Matrix Pencil como tal, termina al plantear los problemas de valores/vectores propios generalizados (65) - (66) o los problemas de valores/vectores propios estándar indicados en la Tabla 1. De ahí en adelante, en la exposición hecha hasta ahora se han planteado una serie de técnicas (dos métodos distintos) que permiten extraer los autovalores de aquellos problemas de manera eficiente, filtrando el efecto del ruido.

En el punto que se desarrolla a continuación se introduce una nueva versión del algoritmo MP.

Si se redefinen las matrices Pencil \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 (y sus equivalentes \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2) por unas matrices ligeramente modificadas, se llega a una versión alternativa del algoritmo Matrix Pencil denominada *Backward-Forward Matrix Pencil Method* (BFMPM) La versión que se ha desarrollado hasta llegar aquí, definiendo las matrices Pencil $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$

para el caso libre de ruido, y $\{\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2\}$ para muestras contaminadas, de acuerdo a (53) – (54) y (91) – (92) respectivamente, se conoce como método *Backward Matrix Pencil Method* (BMPPM), que es la formulación original del método Matrix Pencil introducida en [60]

En la siguiente sección se introduce la formulación BFMPM, y se concluye adaptando el algoritmo Matrix Pencil para el caso de disponer de múltiples muestras temporales o snapshots.

4.1.3.3 Formulación Forward-Backward

Para mejorar la estimación se pueden definir las matrices \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 (y por extensión \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2) del siguiente modo:

$$[\mathbf{G}_1]_{2(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_L \\ \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \dots & \mathbf{s}_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{s}_{N-L} & \mathbf{s}_{N-L+1} & \dots & \mathbf{s}_N \end{bmatrix} \begin{array}{c} \hline \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{L+1}^* & \mathbf{s}_L^* & \dots & \mathbf{s}_2^* \\ \mathbf{s}_{L+2}^* & \mathbf{s}_{L+1}^* & \dots & \mathbf{s}_3^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{s}_N^* & \mathbf{s}_{N-1}^* & \dots & \mathbf{s}_{N-L+1}^* \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$[\mathbf{G}_2]_{2(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \dots & \mathbf{s}_{L+1} \\ \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 & \dots & \mathbf{s}_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{s}_{N-L+1} & \mathbf{s}_{N-L+2} & \dots & \mathbf{s}_N \\ \hline \mathbf{s}_L^* & \mathbf{s}_{L-1}^* & \dots & \mathbf{s}_1^* \\ \mathbf{s}_{L+1}^* & \mathbf{s}_L^* & \dots & \mathbf{s}_2^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{s}_{N-1}^* & \mathbf{s}_{N-2}^* & \dots & \mathbf{s}_{N-L}^* \end{bmatrix} \quad (108)$$

Haciendo uso de estas nuevas matrices Pencil, el haz de matrices

$$\mathbf{MP} \equiv \mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1 \quad (109)$$

tiene ahora dimensión $2(N-L) \times L$.

Se puede demostrar que si se verifica:

$$M \leq L \leq N - M$$

la solución al problema de valores/vectores propios (55), con \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 definidas según (107) y (108), caracteriza las M frecuencias complejas que definen la señal \mathbf{s} (si las muestras están contaminadas con ruido se debe resolver el problema de valores/vectores propios (72))

Para calcular los valores propios de (55) ó (72) se sigue el procedimiento descrito en las secciones 4.1.3.2.1 y 4.1.3.2.2, conformando $\{\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{G}_2\}$ -o sus correspondientes $\{\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2\}$ - de la forma indicada en (107) – (108)

De un modo alternativo se pueden configurar las matrices \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 como se indica a continuación:

$$[\mathbf{G}_1]_{(N-L) \times 2L} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_L & | & \mathbf{s}_N^* & \mathbf{s}_{N-1}^* & \dots & \mathbf{s}_{N-L+1}^* \\ \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \dots & \mathbf{s}_{L+1} & | & \mathbf{s}_{N-1}^* & \mathbf{s}_{N-2}^* & \dots & \mathbf{s}_{N-L}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{s}_{N-L} & \mathbf{s}_{N-L+1} & \dots & \mathbf{s}_{N-1} & | & \mathbf{s}_{L+1}^* & \mathbf{s}_L^* & \dots & \mathbf{s}_2^* \end{bmatrix} \quad (110)$$

$$[\mathbf{G}_2]_{(N-L) \times 2L} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \dots & \mathbf{s}_{L+1} & \mathbf{s}_{N-1}^* & \mathbf{s}_{N-2}^* & \dots & \mathbf{s}_{N-L}^* \\ \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 & \dots & \mathbf{s}_{L+2} & \mathbf{s}_{N-2}^* & \mathbf{s}_{N-3}^* & \dots & \mathbf{s}_{N-L-1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{s}_{N-L+1} & \mathbf{s}_{N-L+2} & \dots & \mathbf{s}_N & \mathbf{s}_L^* & \mathbf{s}_{L-1}^* & \dots & \mathbf{s}_1^* \end{array} \right] \quad (111)$$

Nuevamente se verifica que:

$$\text{rango}(\mathbf{G}_2 - \xi \mathbf{G}_1) = \text{rango}(\mathbf{Z} - \xi \mathbf{I}) \quad (112)$$

Las frecuencias complejas que estamos buscando son los valores propios de (55)

Si se organizan las matrices Pencil de la forma indicada en (110) – (111), se cumple (112) siempre que se satisfaga la siguiente condición:

$$M/2 \leq L \leq N-M \quad (113)$$

que nos conduce a que el número máximo de ondas incidentes soportadas sea igual a $2N/3$.

Obsérvese que las matrices (107) – (108) y (110) – (111) se constituyen a partir del mismo conjunto de datos. En la búsqueda de los valores/vectores propios generalizados de (109), las matrices \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 (y sus equivalentes \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2) se construyen según (107) – (111). Esta particular definición de las matrices Pencil da lugar a una versión del algoritmo Matrix Pencil conocida como: *Forward-Backward Matrix Pencil Method* (FBMPM)

4.1.3.4 Múltiples muestras temporales o Snapshots

Para señales altamente contaminadas y, en general, en escenarios hostiles (cisoides muy próximas en (51)), se hace necesario procesar varias muestras temporales (varios “snapshots”) por sensor, con el fin de conseguir que las estimaciones estén dentro de unos rangos aceptables.

Aunque originalmente [60] el método Matrix Pencil trata con una sola muestra temporal, en [36] se sugiere una posible configuración para cuando se trabaje con múltiples snapshots.

El objetivo, como siempre, es buscar los valores propios del haz de matrices (55) -para el caso libre de ruido- o (72) para cuando los datos están contaminados. Se indica la

manera de definir las matrices Pencil, $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ y sus equivalentes ruidosas $\{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2\}$, asumiendo que el número de snapshots es igual a P .

Como quedó expuesto en el punto 4.1.3.3, se puede definir \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 de dos formas distintas:

- *Haz de dimensión $P(N-L) \times L$*

Las matrices \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 se definen del siguiente modo:

$$[\mathbf{G}_1]_{P(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(\mathbf{t}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_1(\mathbf{t}_{p-1}) \end{bmatrix} ; [\mathbf{G}_2]_{P(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2(\mathbf{t}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_2(\mathbf{t}_{p-1}) \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$[\mathbf{G}_1(\mathbf{t}_n)]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(\mathbf{t}_n) & \mathbf{s}_L(\mathbf{t}_n) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{s}_{N-L}(\mathbf{t}_n) & \mathbf{s}_{N-1}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{G}_2(\mathbf{t}_n)]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2(\mathbf{t}_n) & \mathbf{s}_{L+1}(\mathbf{t}_n) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{s}_{N-L-1}(\mathbf{t}_n) & \mathbf{s}_N(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \quad (115)$$

En [23] se demuestra que cuando:

$$M \leq L \leq N-1 \quad (116)$$

los valores propios de (55) son las frecuencias complejas que estamos buscando.

De (116) se concluye que, procesando múltiples muestras temporales, el método MP es capaz de detectar hasta $N-1$ cisoides.

- *Haz de dimensión $(N-L) \times PL$*

Otro modo alternativo de construir las matrices Pencil es el siguiente:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{G}_1]_{(N-L) \times PL} &= [\mathbf{G}_1(t_0), \dots, \mathbf{G}_1(t_{P-1})] \\
[\mathbf{G}_2]_{(N-L) \times PL} &= [\mathbf{G}_2(t_0), \dots, \mathbf{G}_2(t_{P-1})]
\end{aligned} \tag{117}$$

$\mathbf{G}_i(t_n)$ fue definida en (115)

Igual que en el caso anterior, las soluciones del problema de valores/vectores propios generalizados (55) son las M frecuencias buscadas. Esto se cumplirá siempre que el parámetro L esté acotado de la manera indicada en (116)

4.2 Comparación de los métodos

La Tabla 2 muestra de forma esquemática las características de los métodos de super-resolución que se van a considerar:

	Coherencia de Señales	Múltiples Snapshots	Geometría del Arreglo	Tiempo de cómputo
MUSIC	SI	SI	Arbitraria	Alto
Root-MUSIC	SI	SI	Lineal equiespaciada	Medio
MATRIX PENCIL	NO	NO *	Lineal equiespaciada	Medio

Tabla 2.- Características de los métodos de super-resolución

- Los métodos MUSIC, Root-MUSIC y, en general, todos los métodos basados en subespacio, presentan una notoria degradación cuando las señales están muy correladas (por ejemplo en entornos multicamino, donde debido a múltiples reflexiones, difracciones, etc., la señal producida por una antena emisora se recibe en el receptor vía diferentes trayectos, lo que se traduce en una fuerte correlación temporal) En el caso de tratar un escenario en donde las señales son coherentes, éstas se han de decorrelar como paso previo a la aplicación de cualquier método basado en subespacio. Es por esta razón que en la Tabla 2 aparece un asterisco en la segunda columna. En contraposición, el método Matrix Pencil permite estimar las frecuencias de llegada independientemente del grado de coherencia de las señales incidentes.
- Los métodos basados en subespacio precisan de la información de múltiples snapshots, pues se basan en la descomposición en valores/vectores propios de la

matriz de correlación de datos. Aumentando el número de snapshots se consigue una mejor estimación de las frecuencias que caracterizan la señal de datos. El método Matrix Pencil puede estimar aquellas frecuencias haciendo uso de un único snapshot, aunque tal y como se describe en el punto 4.1.3.4, la estimación mejora cuando se dispone de múltiples snapshots, si bien el precio a pagar es el de tener que redefinir de forma adecuada las matrices Pencil.

- El método MUSIC puede tratar secuencias de datos no uniformes (arreglos no uniformes) El resto de los métodos de super-resolución que se van a desarrollar están restringidos a arreglos lineales equiespaciados. En un caso práctico, si se parte de un arreglo no uniforme y se quieren estimar las frecuencias que caracterizan la señal de datos usando un algoritmo diferente a MUSIC, se ha de transformar previamente el arreglo no uniforme en un arreglo virtual lineal y uniforme.
- Computacionalmente hablando, el método MUSIC es el menos eficiente. El cómputo de la función pseudoespectro es el procedimiento que más tiempo de CPU consume, y será mayor cuanto mayor sea el valor del parámetro D (ver sección 4.1.1) o, dicho de otro modo, cuanto mayor sea la resolución que se desea conseguir. El resto de los métodos de super-resolución que se van a considerar (Root-Music y Matrix Pencil) tienen una complejidad algorítmica semejante y, computacionalmente hablando, son más eficientes que MUSIC.
- En MUSIC se asume que el número de elementos N es mayor que el número de señales M . Esto es necesario porque MUSIC depende de la existencia de un subespacio de ruido. De este modo, con N elementos, MUSIC puede resolver un máximo de $(N - 1)$ señales. Por el lado de Matrix Pencil, siguiendo a la ecuación (113), el valor máximo del parámetro Pencil L (y de ese modo M) es $N/2$ para N par y $(N + 1)/2$ para el caso de N impar. Esta es la penalización que debe pagarse por no estimar una matriz de covarianza.
- En términos de precisión, todas las técnicas adaptativas alcanzan valores similares.
- Root-MUSIC presenta un problema de estabilidad numérica en la extracción de las raíces de polinomios de elevado orden. Los algoritmos para extraer raíces se basan, en su mayoría, en aplicar de forma repetitiva la división sintética, por lo que es difícil mantener bajo control la propagación de los errores numéricos.
- Una ventaja importante de Matrix Pencil es que no es necesario disponer de múltiples muestras.

- Al aplicar Matrix Pencil con múltiples muestras se necesita un detector coherente y conocimientos de los datos que se transmiten (entrenamiento). Promediando los datos recibidos se consigue mejorar la SNR. Si no desaparece la información de fase (debido a la fase aleatoria) la media tendería a cero. Sin embargo, si se dispone de un detector coherente, Matrix Pencil tiene la misma precisión que Root-MUSIC.
- El MUSIC espectral no impone restricciones en cuanto al espaciado o la forma del arreglo de sensores; por el contrario, Root-MUSIC requiere un arreglo lineal equiespaciado. Esta limitación puede crear complicaciones a la hora de detectar ubicaciones; aunque para estimaciones temporales, los sensores forman un arreglo lineal equiespaciado de modo natural, puesto que corresponden a los pesos de los coeficientes del filtro.
- Aunque el error cuadrático medio (MSE) del Root-MUSIC sea igual que el del MUSIC espectral, se prefiere al primero porque a menudo los errores son en gran parte radiales; y un error radial no afecta a la estimación de frecuencias del Root-MUSIC, pero puede hacer que los picos espectrales del MUSIC sean menos definidos. Si dos raíces son muy próximas, una menor definición de los picos puede resultar en una pérdida de resolución. Por ello Root-MUSIC es la técnica preferida para arreglos lineales equiespaciados [46]
- Para incrementar el número de muestras de datos que se envían al algoritmo MUSIC, se pueden sobre muestrear los datos en el dominio de la frecuencia. Sin embargo este aumento no representa ninguna ventaja, porque a su vez hace que sea más difícil resolver los componentes multi-camino.
- MUSIC ofrece estimaciones precisas de los retardos, pero no sucede lo mismo con la información de amplitud.
- La matriz de covarianza FB (forward-backward) tiene propiedades estadísticas distintas de las de la matriz forward-only y de este modo, en el caso general, el rendimiento de los algoritmos FB puede variar significativamente de aquellos de los prototipos forward-only.
- Dadas suficientes muestras, los algoritmos del tipo MUSIC producen resultados bastante precisos. Sin embargo, presentan dos circunstancias que limitan su uso en aplicaciones en tiempo real. En primer lugar, la complejidad de cómputo de los algoritmos de subespacio de ruido es por lo general muy elevada, puesto que las operaciones relacionadas con la matriz de covarianza y estimación de raíces son muy costosas. En segundo lugar, los algoritmos de subespacio de ruido necesitan de varios snapshots para conseguir una estimación precisa.

- MUSIC es un algoritmo de alta resolución que puede aplicarse independientemente de la geometría de la agrupación, pero que no permite la actualización de fuentes en tiempo real. Esto es debido a que MUSIC debe realizar la descomposición de valores singulares de la matriz de covarianza, la cual es estimada a partir de una muestra de tamaño N de los datos obtenidos a la salida de la agrupación de antenas cada vez que se requiere un ajuste de las DOA. Por lo tanto, la implementación de MUSIC resulta inconveniente cuando se requieren actualizaciones continuas de la posición espacial de las fuentes.
- El error en los ceros de la señal en el polinomio Root-MUSIC presenta un importante componente radial. Si el error es solo radial no tiene efecto sobre la estimación del ángulo de llegada, pero hace que el pico de señal correspondiente en el espectro de MUSIC sea menos pronunciado [46]
- Matrix Pencil es más eficaz que el método polinómico tanto desde el punto de vista del cálculo, como de la sensibilidad al ruido en el caso de señales de las que se desconocen los factores de amortiguación, y menos restrictivo también en cuanto a los polos de la señal [37]

4.3 Complejidad de cómputo

En análisis numérico la complejidad de cómputo se identifica típicamente con los requerimientos de memoria y con el tiempo de ejecución del algoritmo que lleva a cabo la tarea [57]

Enfocando la atención en el tiempo de ejecución, entre los múltiples factores que determinan el timing, los que siguen a continuación cobran especial importancia:

- El número de operaciones del ordenador
- La compatibilidad de los cálculos con los recursos del ordenador

Ambos factores dependen de la arquitectura de máquina. Para simplificar el análisis no se considera el caso de arquitecturas paralelas.

En un contexto secuencial, el número de operaciones se aproxima por el número de aquellas de punto flotante (flops)

El segundo factor depende mayormente de la efectividad del uso de la memoria del ordenador y, en particular, de la eficacia a la hora de explotar el sistema de memoria caché. La clave de todo esto es la probabilidad de que, al pedir datos de la memoria

principal, los pedidos que sigan a la memoria hagan referencia a datos que estén dentro de una proximidad suficiente (medida por la distancia en el espacio de direcciones) La localidad del dato procesado no es una característica estática del dato de entrada, sino algo dinámico determinado por el dato de entrada y el algoritmo dado.

Hay dos temas principales que deben ser resueltos por el usuario de un método iterativo: la elección de la métrica para conocer el desempeño del método, y el nivel de precisión que se busca.

Cuando la medición se basa solo en los flops, el coste computacional de resolver iterativamente $Ax = b$ es igual a la suma de los flops requeridos por cada uno de los pasos individuales hasta que se detenga el cálculo. Los flops para cada paso se pueden determinar a partir de la descripción del algoritmo iterativo. Son varias las publicaciones en las que poder consultar las tablas que ofrecen el número de operaciones aritméticas para cada paso de los distintos métodos iterativos.

La técnica de super-resolución se aplica después de transformar la respuesta estimada del canal al impulso (CIR) al dominio de la frecuencia. El principal inconveniente para el uso de las técnicas tradicionales es que comienzan con la estimación de la matriz de covarianza de la señal. En aplicaciones de localización esto implica varias estimaciones del mismo canal, un proceso que consume demasiado tiempo. Además, si hubiera dos componentes de señal correladas, se requeriría una interpolación de datos, lo que incrementaría aún más el tiempo de cálculo a la par que reduciría la resolución.

Para analizar la complejidad de los algoritmos de super-resolución utilizados, comenzaremos por efectuar su descripción en bloques.

El algoritmo MUSIC puede desglosarse de la siguiente manera:

4.3 Complejidad de cómputo

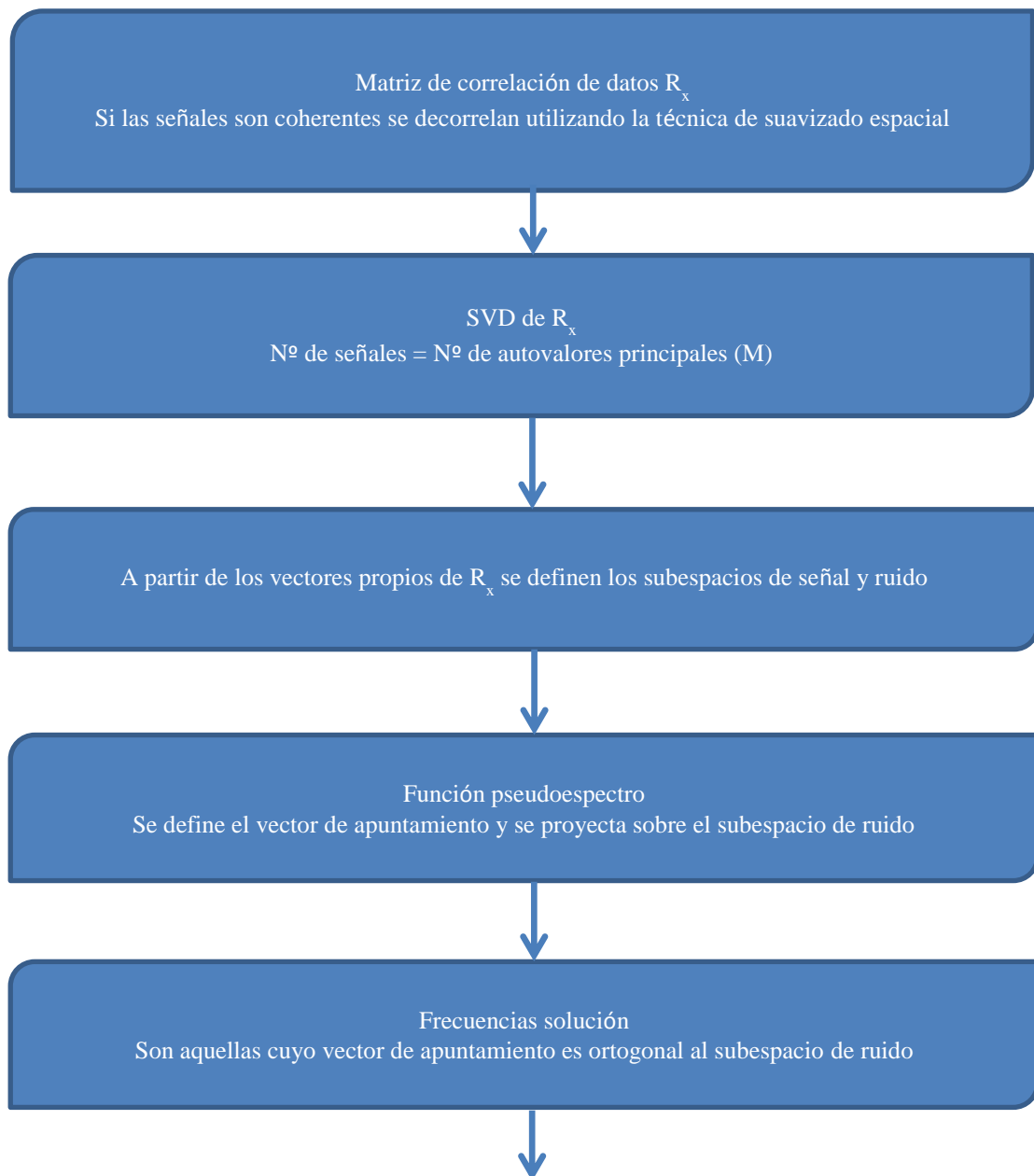


Figura 9: Descripción en bloques del algoritmo MUSIC

Esta técnica de super-resolución se aplica después de transformar la respuesta estimada del canal al impulso (CIR) al dominio de la frecuencia. Demanda una gran carga computacional debido a la descomposición del subespacio de vectores propios de la matriz de correlación.

El mayor inconveniente que presenta el uso de las técnicas tradicionales es que estas comienzan con una estimación de la matriz de covarianza de la señal. En la aplicación para la que se las dedica en esta tesis, se necesitarán varias estimaciones del

mismo canal, lo que significa que es un proceso largo en el tiempo. En el caso que dos componentes cualesquiera de la señal estuvieran correlados, se requeriría un suavizado previo de los datos, incrementando aún más la carga computacional a la vez que reduciendo la resolución. En aquellos escenarios donde el canal varía lentamente, las componentes multi-camino estarán invariablemente correladas.

Teóricamente para estimar los retardos asociados con M componentes se requiere de un mínimo de M estimaciones múltiples e independientes del mismo canal. Pero en la práctica se necesitan mucho más que M estimaciones, por lo que el proceso de estimar el canal tiene que ejecutarse repetidamente. Esto es un proceso inútil que consume mucho tiempo.

Puesto que la estimación del canal se basa en una secuencia de entrenamiento, la repetición de estimaciones da como resultado un menor rendimiento. Además el canal debe permanecer constante durante las varias y distintas estimaciones.

En canales que varían con rapidez es crucial el hacer uso de una única estimación del canal.

Finalmente, para ser capaz de distinguir entre componentes correlados del canal, el algoritmo MUSIC requiere del equivalente en frecuencia del suavizado espacial [43, 49] Esto aumenta más la carga de cómputo, al tiempo que disminuye la precisión.

MUSIC se puede aplicar independientemente de la geometría de la agrupación, pero no permite la actualización de fuentes en tiempo real. Esto es debido a que MUSIC debe realizar la descomposición de valores singulares de la matriz de covarianza, la cual es estimada a partir de una muestra de tamaño N de los datos obtenidos a la salida de la agrupación de antenas cada vez que se requiere un ajuste de los ángulos de llegada. Por lo tanto MUSIC tiene una limitación en la complejidad de cálculo para estimar la matriz de covarianza, por lo que la implementación de MUSIC resulta inconveniente cuando se requieren actualizaciones continuas de la posición espacial de las fuentes.

El algoritmo Root-MUSIC puede describirse en bloques de la siguiente manera:

4.3 Complejidad de cómputo

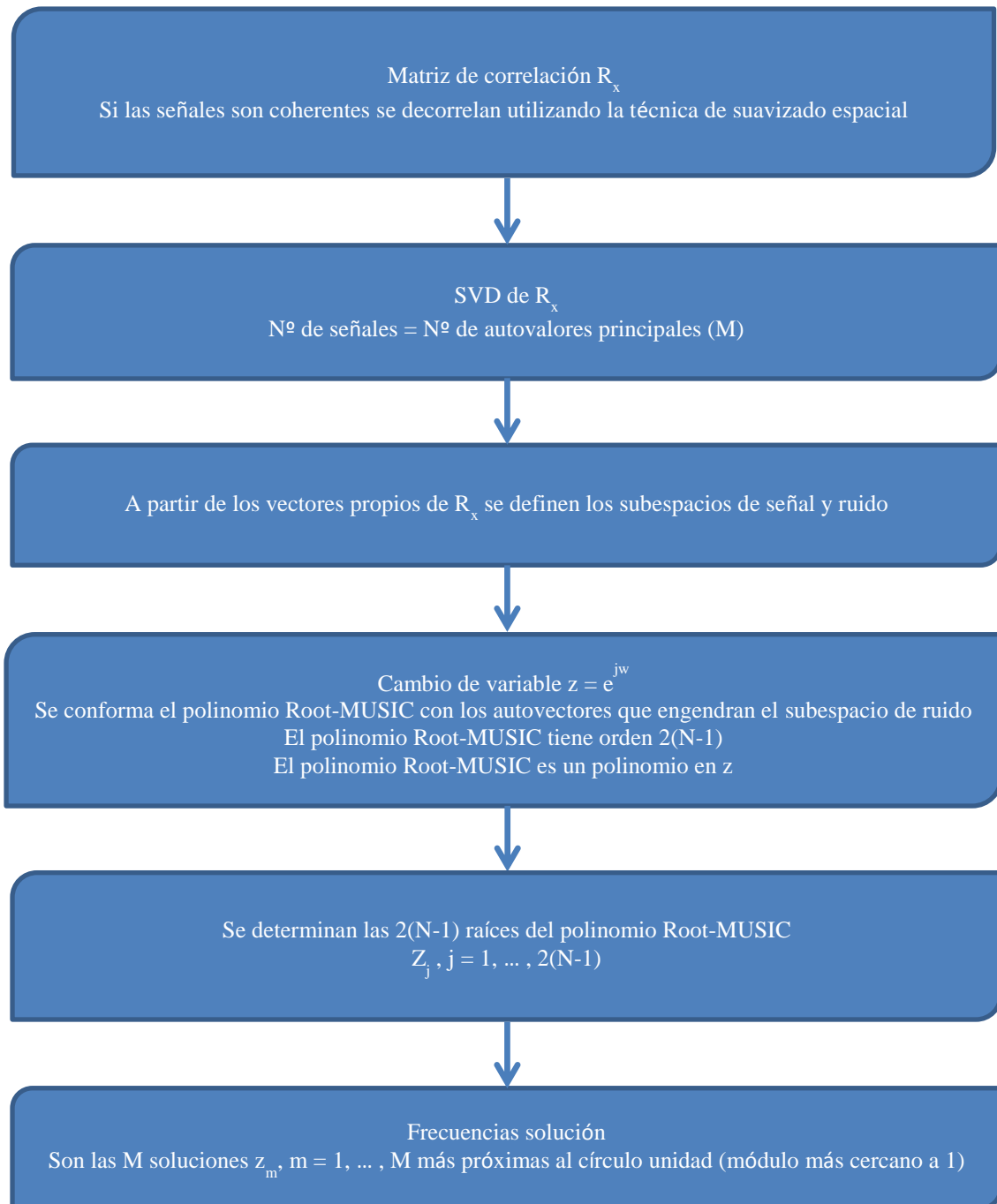


Figura 10: Descripción en bloques del algoritmo Root-MUSIC

Los algoritmos del tipo MUSIC producen resultados bastante precisos cuando se cuenta con un número suficiente de muestras. Sin embargo hay dos factores que limitan su uso en aplicaciones en tiempo real. En primer lugar la complejidad de cómputo del subespacio de ruido del algoritmo es por lo general muy alta, puesto que la estimación de

la matriz de covarianza y de las raíces son operaciones muy costosas. Para llevar a cabo esas operaciones se necesita un hardware sofisticado, lo que aumenta el costo de fabricación y disminuye la capacidad de ejecución en tiempo real. En segundo lugar, para obtener estimaciones precisas los algoritmos de subespacio de ruido necesitan hacer uso de varias muestras.

La negociación entre el número de muestras y su desempeño se debe a que el algoritmo Root-MUSIC requiere de, al menos, N_w muestras para poder estimar la matriz de covarianza espacial. Como es evidente, el tiempo de ejecución aumenta con el número de muestras. Este incremento está directamente relacionado con el coste computacional, al tener que estimar una matriz de covarianza. El tiempo de cálculo del Root-MUSIC muestra claramente que cuando se aumenta el número de muestras, la estimación de la matriz de covarianza se vuelve más dominante en términos de tiempo de cómputo, dejando además de ser singular.

El algoritmo Matrix-Pencil puede describirse en bloques de la siguiente manera:

4.3 Complejidad de cómputo

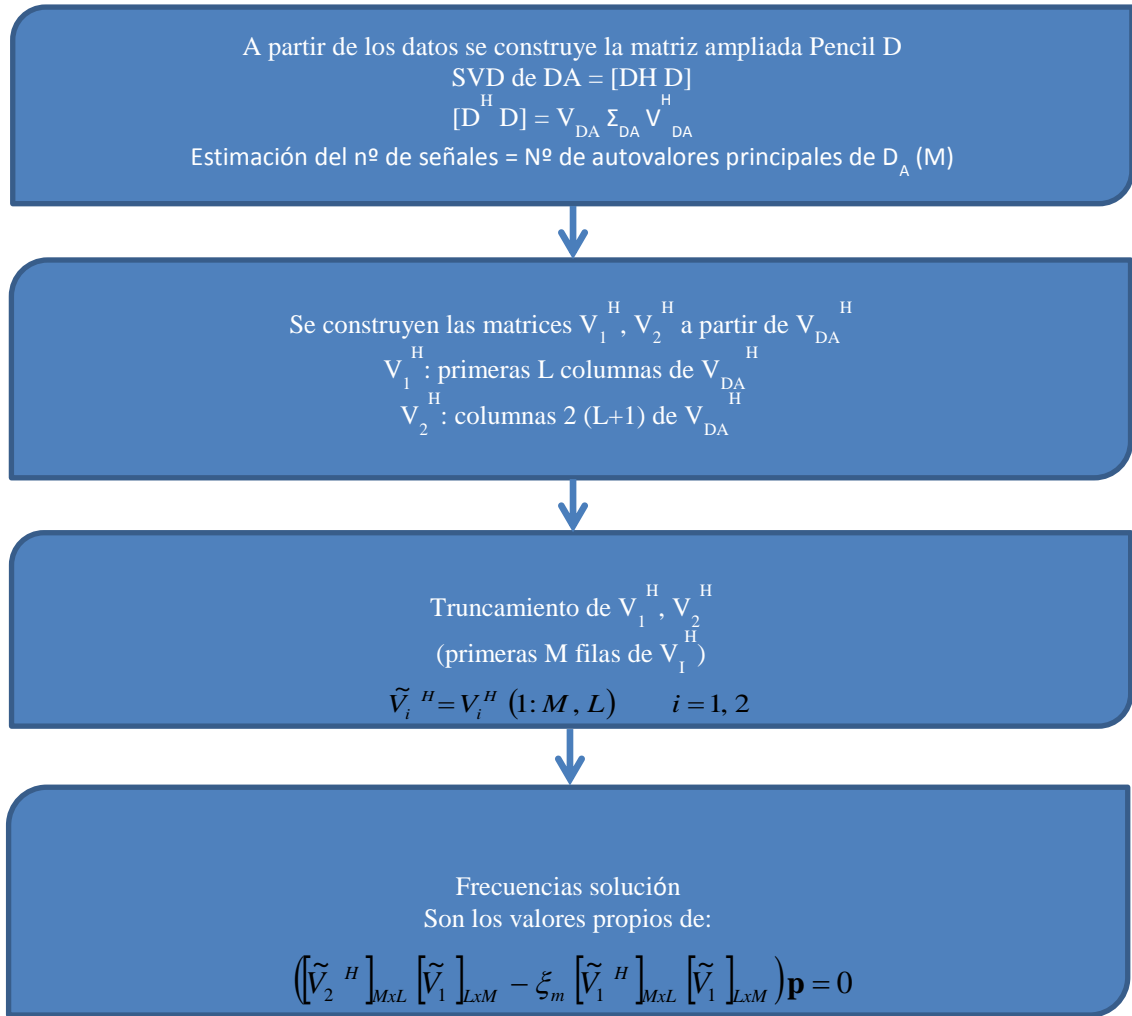


Figura 11: Descripción en bloques del algoritmo Matrix-Pencil

Este algoritmo se basa en mediciones de los canales en el dominio de la frecuencia.

En radar y otras aplicaciones que procesan señales, el algoritmo Matrix Pencil presenta estimaciones muy precisas de la DOA con solo una única muestra y con una carga computacional extremadamente baja [24] [11]

La gran ventaja de utilizar Matrix Pencil es que su complejidad de cálculo es mucho menor que la de los algoritmos de subespacio de ruido, por no tener que estimar ninguna matriz de covarianza espacial ni hallar raíces polinómicas. Además Matrix Pencil trabaja bien aún con una sola muestra, lo que lo hace muy atractivo a la hora de utilizarlo en aplicaciones en tiempo real.

Matrix Pencil no presenta cambios con el incremento del número de muestras. Esto se debe a que la carga de computación depende principalmente del tamaño del arreglo de la antena y del parámetro Pencil, L , más que del número de muestras.

El algoritmo Matrix Pencil ofrece algunas ventajas significativas. Requiere aproximadamente la mitad de la carga de cómputo que las técnicas basadas en la matriz de covarianza, como el MUSIC. Además solo necesita de una única estimación de canal. Se puede aplicar en escenarios coherentes multicamino y en canales que varían relativamente rápido. Matrix Pencil puede distinguir entre componentes correlados, puesto que hace uso de una única estimación del canal.

Si se dispone de varias estimaciones del canal, puede aplicarse el algoritmo Matrix Pencil empleando una estimación promedio.

Comparando la carga computacional, Matrix Pencil es al menos ocho veces más rápido que el Root-MUSIC y unas cinco veces más que el MUSIC, lo que queda reflejado en la Figura 49. Esto se debe, principalmente, a que Matrix Pencil no necesita estimar ninguna matriz de correlación.

Capítulo 5

Análisis

En los últimos años, a la par que aumentaba la movilidad de los equipos de comunicaciones, ha ido creciendo la necesidad de determinar la posición de las fuentes emisoras:

- En radio monitorización, siguiendo las líneas establecidas por el ITU
 - En la búsqueda de fuentes de interferencia
 - Identificación y localización de transmisores ilegales
- En los servicios de seguridad
 - Reconocimiento de radiocomunicaciones originadas por organizaciones criminales
- En la inteligencia militar
 - Detección de las actividades de enemigos potenciales
- En sistemas inteligentes de comunicaciones
 - Acceso Múltiple por División Espacial (SDMA) que necesita del conocimiento de la DoA de las señales incidentes
- En investigación
 - Radioastronomía
 - Sensores remotos

En este capítulo se consideran los factores que pueden afectar el resultado de las simulaciones así como el desempeño de los algoritmos considerados, entre los que el más importante es la estimación errónea del número de señales.

La disponibilidad de modelos precisos y específicos de los escenarios bajo estudio es considerada una de las mayores dificultades a la hora de utilizar el trazado de rayos como forma de estudio del canal de comunicaciones.

Un problema serio a la hora de utilizar cualquiera de los algoritmos de super-resolución es que, para poder estimar el espectro, debe conocerse de antemano el orden del modelo. Por poner un ejemplo, en las aproximaciones basadas en autovectores debe conocerse, o estimarse, el número de señales, para de ese modo poder separar el espacio de observación en los subespacios de señal más ruido y ruido. Cuando se conoce con precisión el número de señales (o se las estima correctamente), los subespacios de señal y de ruido tendrán las dimensiones correctas. En ausencia de ruido la diferencia entre autovalores de los subespacios es importante y resulta sencillo determinar cuántas son las señales que llegan, pero con ruido la situación es bien distinta y debe recurrirse a métodos estadísticos o probabilísticos para su estimación.

El algoritmo MUSIC es el método de subespacio más popular, principalmente por ser aplicable a arreglos de orientación y respuesta arbitraria. MUSIC extrae los valores de correlación (elementos del vector director) de las señales que proceden de un mismo emisor y se reciben en antenas distintas.

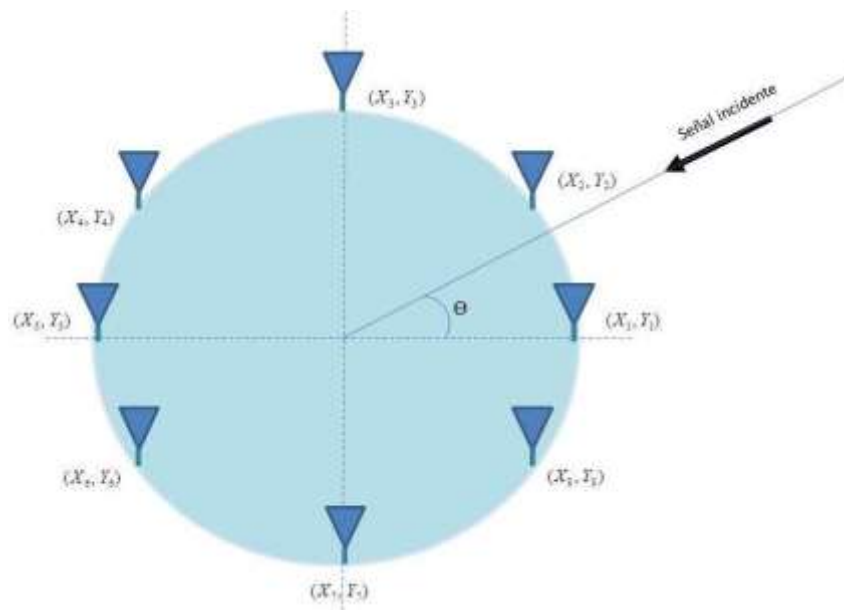


Figura 12: Ilustración descriptiva del concepto de Vector Director

En el caso del Matrix Pencil es fundamental la estimación del valor del parámetro Pencil (L) Yamada et al. describen el efecto que tiene sobre la respuesta el que no se estime correctamente este valor L [56] Ellos concluyen que una sobre estimación de L solo afecta ligeramente los resultados, y que pueden aparecer entonces picos espurios en

el espectro. En nuestras simulaciones, sin embargo, no aparecen picos espurios agudos que interfieran con los resultados. Por el contrario, una estimación por debajo del valor de L hará que el algoritmo resuelva un menor número de señales, y aquellas que sean detectadas presenten errores importantes. De este modo y por lo general, es más seguro sobre estimar L que subestimarlos.

5.1 Modelado ambiental

Lo primero que hace falta para poder utilizar un sistema de trazado de rayos es un modelo que describa el entorno bajo estudio. Esos modelos utilizan facetas, que son polígonos simples a los que se asigna información de posición y orientación. Un simple plano puede ser descrito con dos facetas, pero para el caso de estructuras complejas en entornos urbanos se necesita un número muy elevado de facetas. Además, a cada faceta se le debe asignar propiedades que describan cómo va a responder a la radiación electromagnética incidente. Algunas simulaciones electromagnéticas modelan las facetas como conformadas por conductores eléctricos perfectos (PEC), pero esto no permite obtener resultados válidos, puesto que ese tipo de materiales reflejan toda la radiación incidente y modelan las pérdidas por reflexión. La sofisticación se puede extender a especificar la permitividad relativa (ϵ_r) así como la permeabilidad relativa del material (μ_r) y su conductividad (σ) buscando la mejor representación de las reacciones de los elementos a las señales incidentes. Sus valores se encuentran en tablas que describen las propiedades eléctricas de los distintos materiales.

5.2 Acoplamiento entre los elementos del arreglo

Los algoritmos de super-resolución empleados hacen uso del vector director del arreglo para generar el espectro espacial que, de forma intuitiva, representa la potencia de la señal en función de la dirección.

Como muestra la Figura 12, el vector director ideal depende de la geometría del arreglo y del ángulo de incidencia de la señal, pero no tiene en cuenta los efectos del acoplamiento mutuo, que debiera considerar la retransmisión de energía de la señal producida por cada uno de los elementos del arreglo y que afectan a los otros.

5.3 Entornos con señales correladas o coherentes

La correlación de señales limita la precisión de los algoritmos de super-resolución. Cuando las señales que llegan a la antena están correladas, la matriz de covarianza de la señal tenderá a estar mal condicionada (próxima a la singularidad en los casos de correlación y singular si se llega a la coherencia) y no podrá utilizarse para la localización. La causa de la existencia de señales correladas o coherentes en comunicaciones inalámbricas es la propagación multi-camino.

Cuando aumenta el coeficiente de correlación se comprueba que aumenta la varianza del valor de la localización. Las Tablas 3 y 4 son una muestra de los valores de la media y la varianza del estimador en función de distintos valores de correlación de la señal para un mismo escenario, luego de 50 ejecuciones, con fuentes a distancias de 60 y 80 m, SNR de 20 dB y utilizando el algoritmo MUSIC.

Correlación	Valor real	Media	Varianza
0,25	60	60	0,32
0,50	60	60	0,41
0,75	60	60	0,72
0,90	60	60	1,9
0,99	60	64	120

Tabla 3- Valores estadísticos de media y varianza del estimador en función de la correlación de la señal para una fuente situada a 60 m

Correlación	Valor real	Media	Varianza
0,25	80	80	0,26
0,50	80	80	0,33
0,75	80	80	0,56
0,90	80	80	1,5
0,99	80	86	280

Tabla 4- Valores estadísticos de media y varianza del estimador en función de la correlación de la señal para una fuente situada a 80 m

Los resultados dejan en evidencia que un incremento en el coeficiente de correlación lleva consigo un aumento en paralelo del estimador. Con coeficientes de correlación moderados ($r \leq 0,9$) y para el escenario utilizado, el algoritmo MUSIC ofrece una estimación precisa.

Puede demostrarse también que, aplicando una transformación de suavizado a una aproximación a la matriz de covarianza de rango reducido, se obtiene una mejor estimación de los parámetros que si se aplica un suavizado espacial convencional [51]

5.4 Carga computacional

La carga o esfuerzo de cálculo es otro de los factores a considerar, especialmente cuando se piensa en aplicaciones en tiempo real. Sin embargo en los últimos años está perdiendo importancia debido a la continua mejora en la velocidad de los procesadores y memorias.

El cálculo exacto del coste computacional no es una tarea sencilla pero pueden obtenerse conclusiones válidas partiendo del hecho conocido de que la estimación del número de operaciones que demanda encontrar la descomposición en autovalores / autovectores de una matriz $M \times M$, es $O(M^3)$ [21] y que, una vez estimada la matriz general de correlación, los métodos de subespacio de señal solo necesitan de una EVD.

La función de autocorrelación tiene una complejidad de cálculo del orden de $O(N^2)$ para N muestras de datos.

En el caso de la DFT, suele emplearse con un algoritmo fast radix-2 para reducir la complejidad de cálculo a un orden de $N \log_2 N$.

Para la parte del trazado de rayos debe tenerse en cuenta que aún para el escenario urbano más simple, el coste computacional puede resultar considerable. El tiempo que demanda la simulación va en función del orden de los efectos contemplados, así como del número de facetas y de los puntos de observación del campo.

5.5 Efecto del número P de señales

En los casos teóricos se asume que el número de señales es conocido. Sin embargo, en un escenario real este dato tiene que ser estimado a partir de la señal recibida. Cabe preguntarse entonces cómo de sensibles son los algoritmos de super-resolución a los errores cometidos en la estimación del orden del modelo.

El número de señales P se estima, por lo general, a partir de una EVD de la matriz de correlación.

MUSIC utiliza el subespacio de ruido y encuentra los vectores que le son ortogonales. Por lo tanto, el trabajar con un número de señales equivocado conduce no solo a unos subespacios de ruido y de señal incorrectos, sino al desastre en la estimación del objetivo.

Puesto que no siempre se puede estimar correctamente el número \hat{P} , resulta necesario considerar y acotar los efectos de este error.

5.5.1 Sobre estimación del número de señales

Asumamos que P es el número verdadero de señales, y que \hat{P} es el estimado. Si $\hat{P} > P$ (sobre-estimación), el subespacio estimado de señal \hat{F}_1 es:

$$\hat{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 & \tilde{W}_1 \end{bmatrix}$$

donde F_1 es el subespacio verdadero de la señal y:

$$\tilde{W}_1 = \begin{bmatrix} v_{1,P+1} & \cdots & v_{1,\hat{P}} \end{bmatrix}$$

es el conjunto de autovectores adicionales del subespacio de ruido causado por la sobre estimación de \hat{P}

Las simulaciones han demostrado que una sobre estimación del número de señales incidentes no produce error en la estimación de las distancias a las fuentes.

5.5.2 Infra estimación del número de señales

El otro caso es cuando el valor estimado \hat{P} es inferior al valor correcto P . En esta situación los subespacios estimados de ruido contienen parte de los subespacios de señal [38]

Cuando se da este caso, las simulaciones indican que no es posible estimar de forma correcta la distancia a las fuentes.

Capítulo 6

Simulaciones

El área geográfica utilizada en las simulaciones de exteriores corresponde a una zona de la Villa de Madrid. El modelado fue creado con AutoCAD siguiendo las características reales de los edificios localizados en esa área. Una vez procesada e insertada esta información en el programa de simulación, se forma la representación que muestra la Figura 13.

FASANT (Fast Computer Tool for the Analysis of On Board Antennas) [25] es un desarrollo para trabajar en alta frecuencia, donde las facetas de los edificios, etc., deben de ser eléctricamente grandes (hablamos de, por lo menos, $1,5$ ó 2λ). Estos programas están basados en la Teoría Geométrica de la Difracción (GTD) y, por lo tanto, se debe de cumplir con la condición anterior. Si se calcula la longitud de onda para frecuencias bajas, casi continuas, esta tiende a infinito, de lo que se deduce que los resultados proporcionados no se ajustarían a la realidad.

GTD es una herramienta por ordenador extremadamente útil y eficiente para el análisis en 3D de antenas situadas en entornos complejos. En el caso de FASANT, el kernel de su programa está basado en los principios de la Óptica Geométrica (GO), la Física Óptica (OP) y la Teoría Uniforme de la Difracción (UTD). Para acelerar el trazado de los rayos aplica una combinación del Buffer Angular Z (AZB), del Particionado Volumétrico Espacial (SVP) y del algoritmo heurístico A*.

La mecánica para llevar a cabo simulaciones es relativamente sencilla. Una vez modelado el escenario objeto del estudio se determinan los parámetros de entrada para el trazado de rayos. Esto incluye lo siguiente:

- Frecuencia del sistema (valores máximo y mínimo, de acuerdo con el ancho de banda establecido)

- Antena transmisora y unidades móviles de observación. Una vez modelado el entorno objeto de simulación, y previo a poder efectuar la misma, se escoge la ubicación física de la antena emisora, así como sus características, tipo, posición, orientación, características, bandas a cubrir y demás parámetros configurables.
- Mecanismos de los rayos a considerar. Los mecanismos a considerar por el sistema de trazado de rayos se refieren a los principios electromagnéticos a tener en cuenta por el sistema en la propagación de las señales. Esos principios incluyen el rayo directo, la reflexión, difracción, reflexión-difracción, difracción-reflexión, doble reflexión y doble refracción [19] A un rayo que se propaga desde el transmisor al receptor a través de una única reflexión o difracción se le considera como un efecto de primer orden. Al sistema se debe indicar por tanto, el orden máximo que debe modelar. En este trabajo se han considerado efectos de segundo orden, pues a medida que se aumenta el orden de los efectos sube de un modo tremendo (varios ordenes de magnitud) el coste computacional. Sin embargo lo que se gana teniendo en cuenta esos mayores órdenes no justifica la ganancia, porque la señal va perdiendo energía en cada reflexión o difracción [53] El sistema de trazado de rayos utilizado en las simulaciones permite especificar el número máximo de reflexiones y difracciones de forma independiente.

Una vez fijado el ancho de banda en Hertzios, y de hacer lo propio con las frecuencias máximas y mínimas, se habrá establecido la resolución en distancia que se podrá obtener en la simulación.

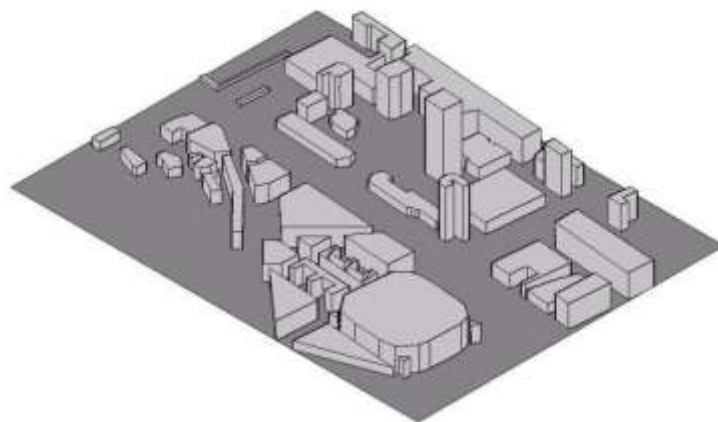


Figura 13: Modelado de una zona de la Villa de Madrid

Las Figuras 11, 12 y 13 representan una vista en planta de un sector de la ciudad. El círculo azul señala el área de interés: el punto negro, que representa la antena; la línea roja que indica la dirección en la que radia su lóbulo principal; y una casi imperceptible línea verde que indica la posición de cinco puntos de observación, separados entre sí por una distancia inferior a una longitud de onda. En las imágenes se muestra la disposición de los elementos radiantes en algunas de las simulaciones llevadas a cabo, resaltando su orientación en la búsqueda de mayor o menor número de efectos (reflexión, refracción, ...)

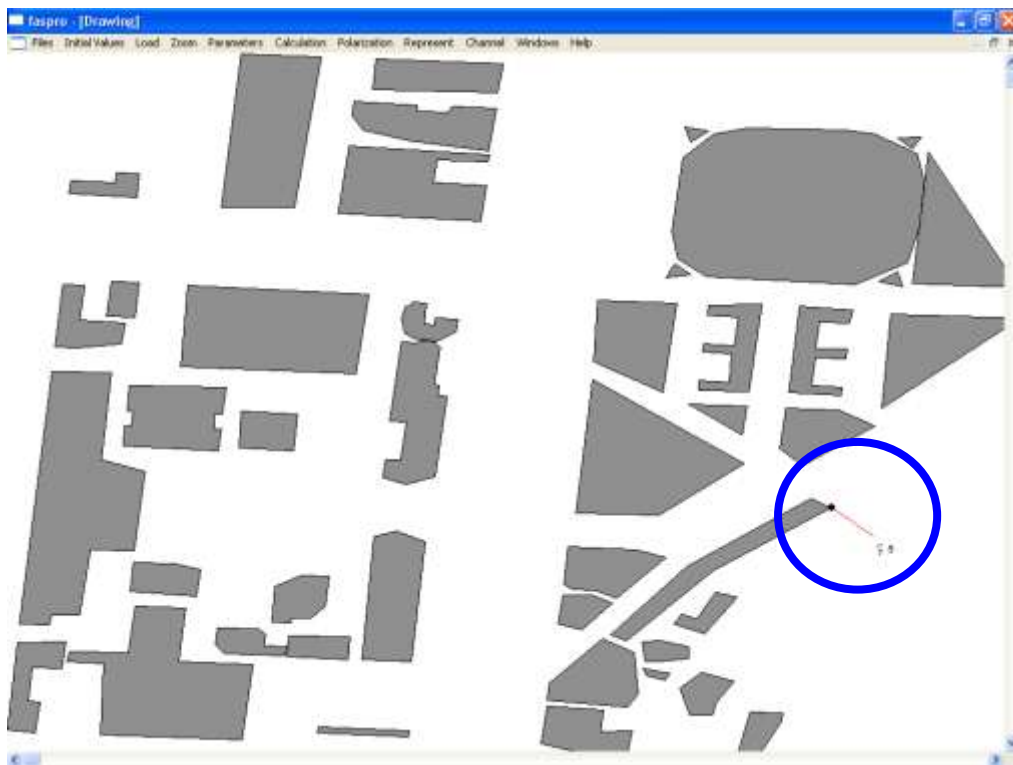


Figura 14: Escenario de simulación en exteriores con un número reducido de efectos

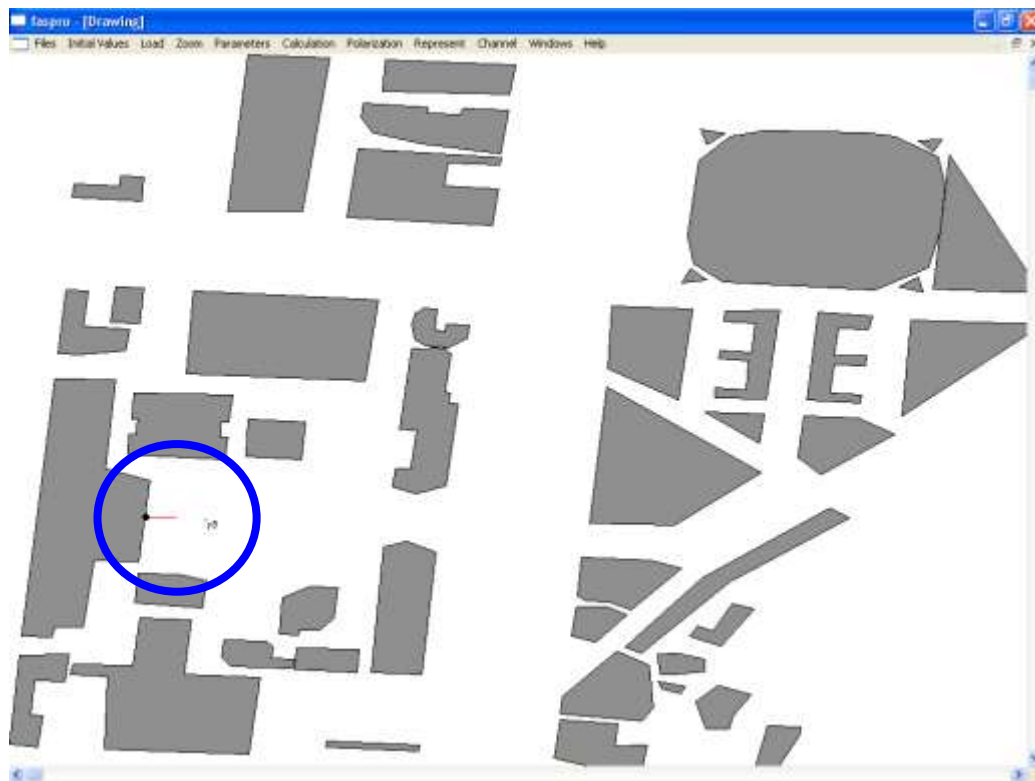


Figura 15: Escenario de simulación en exteriores con gran número de efectos



Figura 16: Otro escenario de simulación utilizado

Para las simulaciones en interiores con el programa FASANT, se ha utilizado el modelado de una planta de un edificio de oficinas que se muestra en la Figura 17:

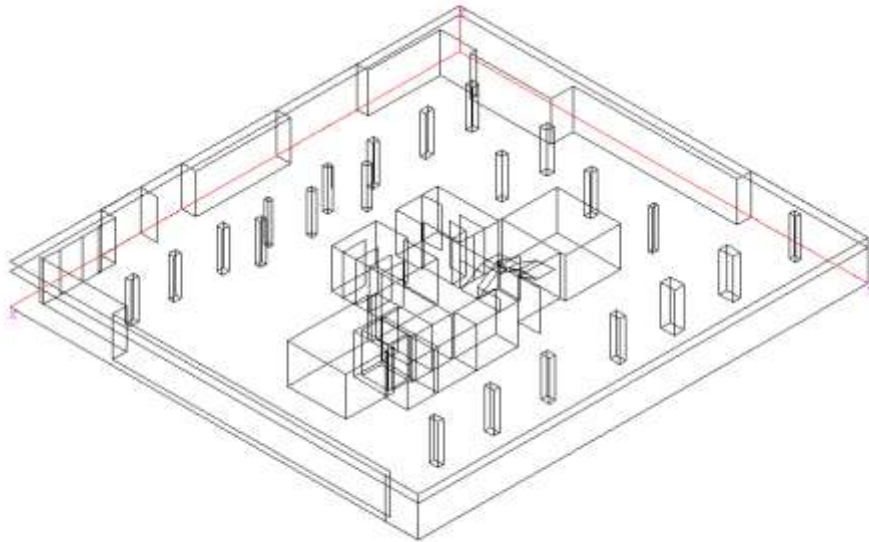


Figura 17: Modelado de la planta de un edificio de oficinas

6.1 FFT

En primer lugar se hicieron estimaciones basadas en FFT. Se trata de un método simple de implementar y eficiente desde el punto de vista de la carga computacional. A los datos obtenidos en el dominio de la frecuencia se les aplica la transformada inversa de Fourier para poder trabajar con ellos en el dominio del tiempo, que se demuestra mucho más útil cuando lo que se persigue es la detección de objetos, el reconocimiento o la interpretación de los mismos. La transformada de Fourier de un objeto ideal es una senoide compleja con una parte real que depende de la posición del elemento.

El espectro que se obtiene mediante algoritmos como los que se analizan aquí, puede resultar más o menos preciso. En particular, el método de Fourier presenta problemas tanto a la hora de distinguir señales suficientemente próximas, como a la de detectar una señal débil en presencia de otra fuerte. La resolución espectral Δf (en Hz) aparece limitada por la recíproca del tiempo de observación, lo que significa que utilizando N puntos para la Transformada Rápida de Fourier (FFT), es $\Delta f = 1 / NT$, donde

T es el período de muestreo. Esto significa que la FFT no será capaz de distinguir aquellos componentes en frecuencia separados por una distancia menor que $(N\Delta T)^{-1}$.

Una forma de mejorar la resolución en frecuencia utilizando FFT es a través de un número mayor de muestras. Pero no siempre es posible utilizar un número grande de muestras en aplicaciones en tiempo real y, si hubiera múltiples sinusoides con un espaciamiento de frecuencia menor que Δf , la FFT no será capaz de resolverlas.

El uso de ventanas tiene un efecto que permite aliviar el problema a la hora de realizar el muestreo, mitigando el efecto de pérdida de energía por los lóbulos laterales y que varía en función de la ventana utilizada. Un intervalo de observación $N\Delta T$, por ejemplo, es equivalente a una ventana rectangular, que aplicada a la señal original da como resultado un número finito de muestras.

Pero aún cuando la aplicación de ventanas puede reducir el desvío del valor a estimar, tiene como inconveniente que disminuye la resolución espectral. En consecuencia debe procederse a evaluar un punto de equilibrio entre la resolución que se pretende y la reducción de los lóbulos secundarios.

IFT es un algoritmo de estimación TOA simple y convencional, que ofrece una representación en el dominio del tiempo del perfil del canal partiendo de los datos medidos en el dominio de la frecuencia.

La Figura 18 muestra un diagrama en bloques del algoritmo IFT:

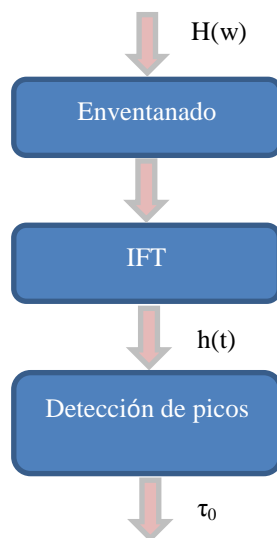


Figura 18: Diagrama en bloques del algoritmo de estimación IFT

Para asegurar una representación precisa en el dominio de la frecuencia se considera el enventanado a la hora de extraer la DFT de los datos, con lo que se busca evitar los falsos picos y pérdidas.

Los métodos DFT asumen que las señales son periódicas con un período equivalente al tiempo de observación. Si la extensión periódica no se corresponde con el período natural de la señal, aparece una discontinuidad. Esta discontinuidad se traduce en una pérdida espectral. Es por esa razón por la que se utilizan distintas ventanas con las que se busca anular suavemente los datos en los límites del período de observación, y dar continuidad en la extensión periódica.

Conviene recordar aquí que el espectro de Fourier de la función de autocorrelación de una senoide es su espectro de potencia.

Hay distintas ventanas a las que se puede recurrir, y todas y cada una de ellas presentan ventajas y desventajas. El enventanado de los datos, de por sí, provoca una merma en la resolución debido a que produce un mayor ancho del lóbulo principal, pero a su vez hace que los lóbulos laterales disminuyan, lo que se traduce en menor interferencia. El ancho de banda equivalente del ruido (ENB) de la ventana mide el desempeño de esta con respecto al ruido, y es el ancho del filtro rectangular que acumularía la misma potencia de ruido con idéntica ganancia del pico de potencia. Cada ventana presenta distintas soluciones de compromiso entre resolución e interferencia que deben ser tenidas en cuenta. Así pues la elección de la ventana puede diferir si se trata de detectar un componente espectral en presencia de ruido en banda ancha, o de distinguir entre componentes de frecuencia en banda estrecha.

El efecto que se consigue al multiplicar la señal por alguna función de ventana es equivalente a convolucionar su espectro con la DFT de la función ventana. De este modo, al ser truncadas y enventanadas, las sinusoides de la señal adoptan la forma espectral de la ventana. Esta forma espectral de la función ventana se compone de un lóbulo principal y varios lóbulos laterales dispersos por el espectro. El ancho del lóbulo principal y el nivel máximo de los lóbulos laterales vienen determinados por la forma de la ventana. Esos factores ejercen su influencia unos sobre otros, de forma que un lóbulo principal estrecho se corresponde con una alta resolución en frecuencia, lo que resulta a su vez en lóbulos laterales relativamente grandes, es decir que se filtra más energía del espectro en otras bandas de frecuencia. La forma de la transformada de Fourier de una función de ventana recibe con frecuencia el nombre de “kernel”.

A continuación se presentan los resultados del valor del campo electromagnético en función de la frecuencia y las distancias para distintos tipos de enventanado. Se

excluye del análisis a la ventana rectangular porque no se adapta bien al caso de utilizar una IDFT para convertir los datos del dominio de la frecuencia al del tiempo, puesto que presenta una pérdida de espectro cuando la señal no es periódica con el tiempo de observación.

6.1.1 Ventana de Hamming

Esta ventana presenta una excelente relación entre el ancho del lóbulo principal y la amplitud de los lóbulos laterales.

La amplitud máxima de sus lóbulos laterales está 43 dB por debajo de la del lóbulo principal, y el ancho de transición de este último es de 1,81 veces el de la ventana rectangular. Pero lo que este enventanado no evita es que, al intentar disminuir la interferencia producida por los lóbulos laterales [12], aumente el ancho del lóbulo principal.

La función que define esta ventana es:

$$w(k+1) = 0,54 - 0,46 \cos\left(2\pi\left(\frac{k}{n-1}\right)\right), \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (118)$$

De manera similar, fuera del rango 0 a n-1, la función toma el valor cero.

En las Figuras 16 y 17 puede observarse el resultado producido por la aplicación de la ventana de Hamming:

6.1 FFT

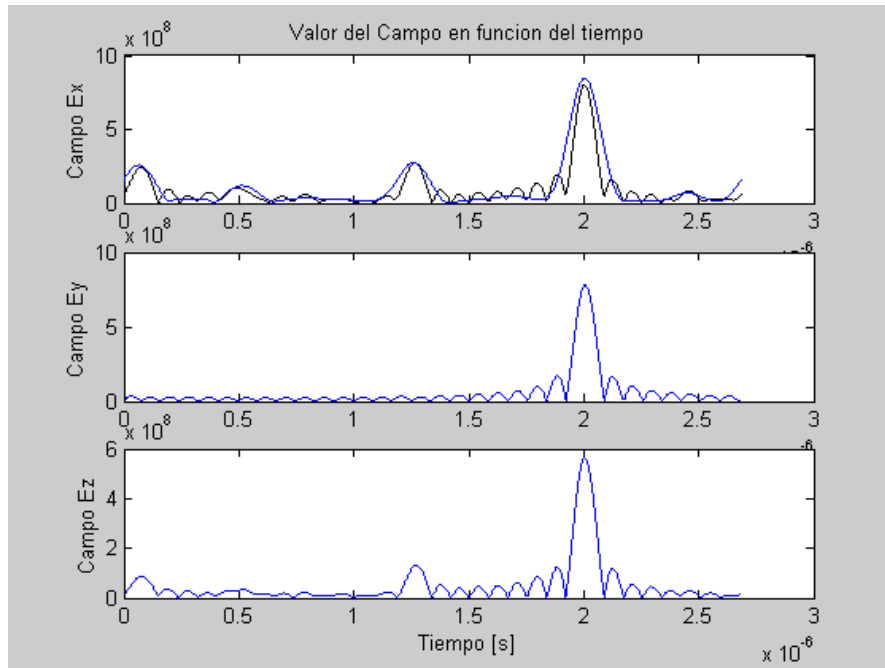


Figura 19: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Hamming

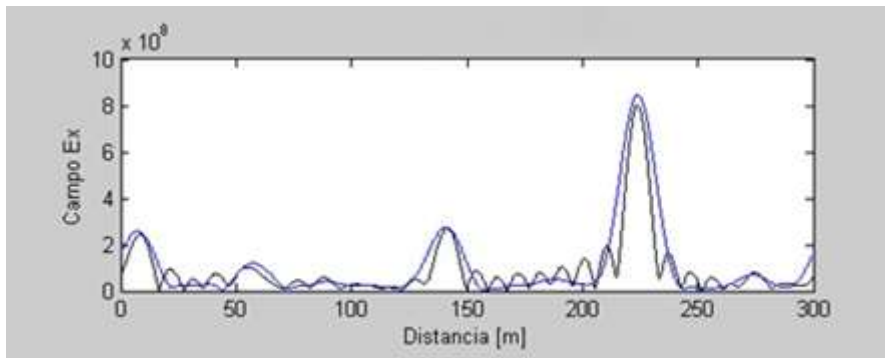


Figura 20: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Hamming

6.1.2 Ventana Bartlett

La ventana Bartlett, o triangular, presenta un ancho más pequeño de su lóbulo principal pero, por contra, sus lóbulos laterales son mucho más altos que los de la ventana Hamming. Se pueden bajar los lóbulos laterales más allá de los 27 dB; pero el ancho del lóbulo principal aumenta con la reducción de estos. El ancho de transición del lóbulo principal es de 1,78 veces el de la ventana rectangular.

La función que la define es:

$$w(n) = w_R(n) \left[1 - \frac{|n|}{\frac{M-1}{2}} \right], \quad n \in \left[-\frac{M-1}{2}, \frac{M-1}{2} \right] \quad (119)$$

En las Figuras 20 y 21 se observa el resultado producido aplicando la ventana Bartlett:

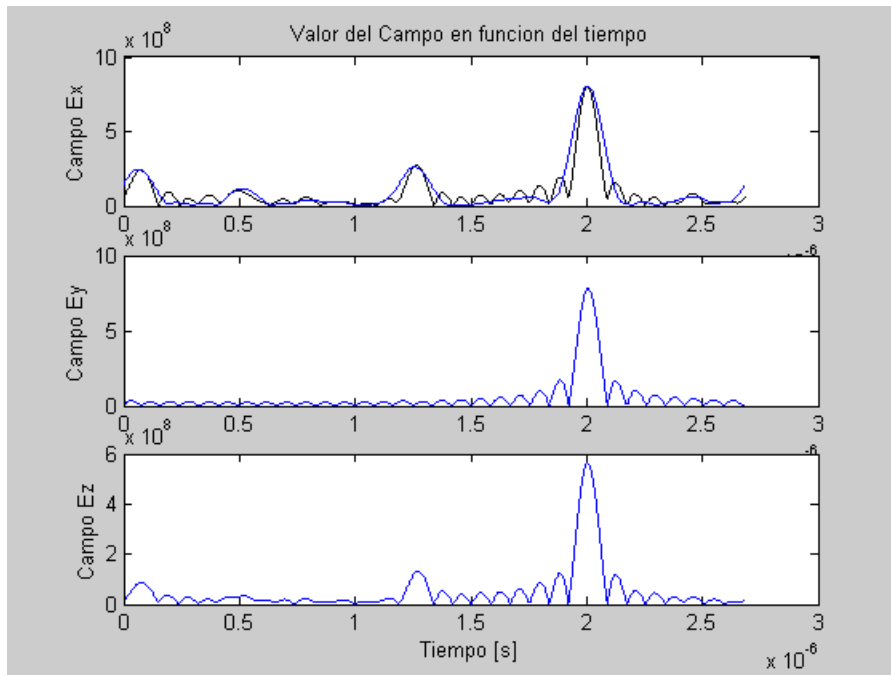


Figura 21: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con inventanado Bartlett

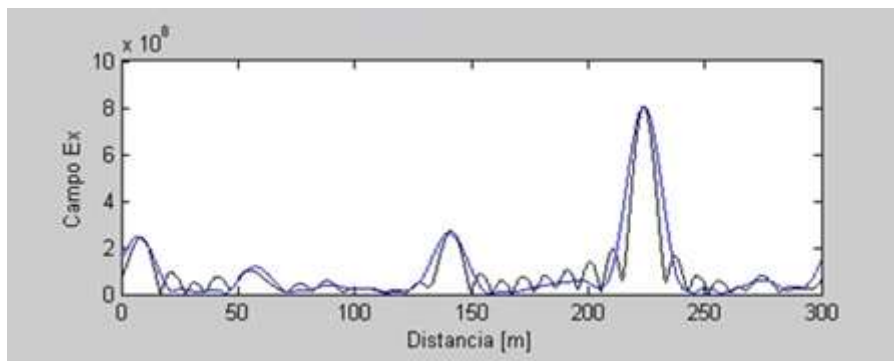


Figura 22: Estimación de distancias mediante FFT y inventanado Bartlett

6.1.3 Ventana Hanning

La ventana de Hanning se define a través de la función:

$$wh(k) = 0,5 \left(1 - \cos \left(2\pi \left(\frac{k}{n+1} \right) \right) \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (120)$$

Para valores fuera del rango 1 a n, la amplitud es 0.

Sus lóbulos laterales tienen una amplitud máxima que está 32 dB por debajo de la del lóbulo principal, con un ancho de transición de este último de 2 veces el de la ventana rectangular.

En las Figuras 20 y 21 se puede observar el resultado conseguido mediante la aplicación de la ventana Hanning:

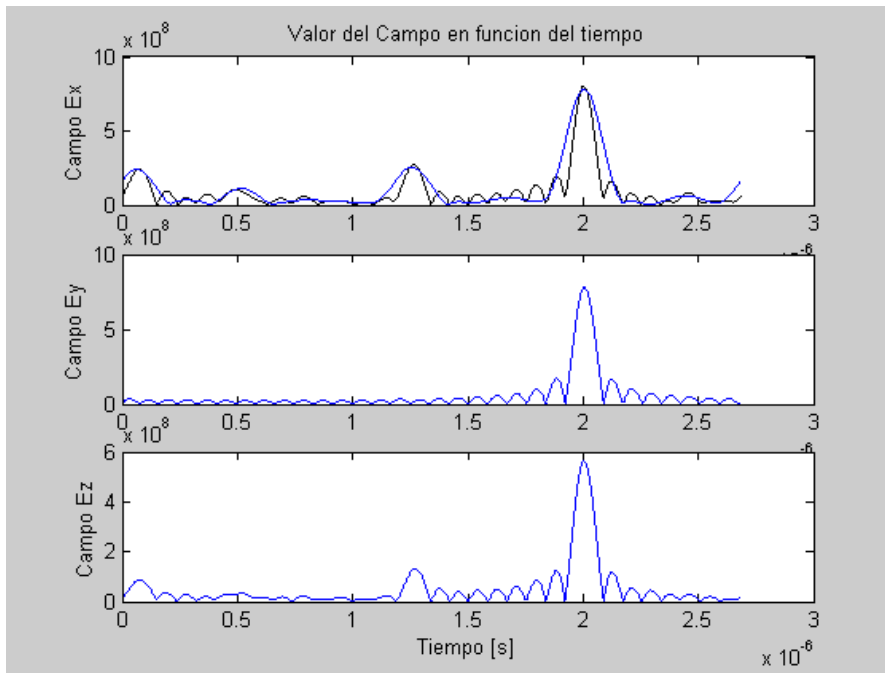


Figura 23: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Hanning

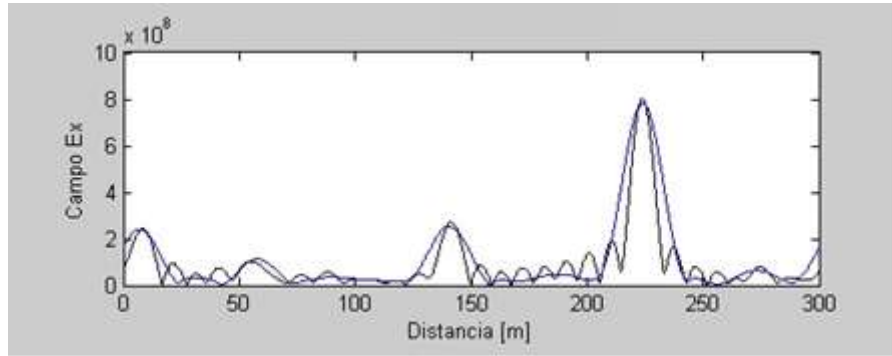


Figura 24: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Hanning

Este enventanado resulta útil en mediciones con baja SNR, porque presenta una resolución en frecuencia mejor que la de otras ventanas y donde la presencia de unos lóbulos laterales moderados no represente un problema.

6.1.4 Ventana Chebyshev

Esta ventana minimiza el ancho del lóbulo principal para una determinada altura de su lóbulo lateral. Se la conoce por su comportamiento “equiripple”, que significa que todos sus lóbulos laterales tienen la misma altura.

La fórmula que la representa es la que sigue a continuación:

$$w_{DC}(nT) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} T_{N-1} \left[x_0 \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{2n\pi i}{N}\right) \right] \right] \quad (121)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \frac{(N-1)}{2}$$

donde:

r es la relación que se desea para el ripple (expresada como fracción)

$$x_0 = \cosh \left(\frac{1}{(N-1)} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{r} \right) \right)$$

$T_k(x)$ es el k -ésimo polinomio de Chebyshev asociado con la aproximación para filtros recursivos, y dado por:

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \cos^{-1} x) & \text{para } |x| \leq 1 \\ \cosh(k \cosh^{-1} x) & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

En las Figuras 24 y 25 puede observarse el resultado producido por aplicación de la ventana Chebwin:

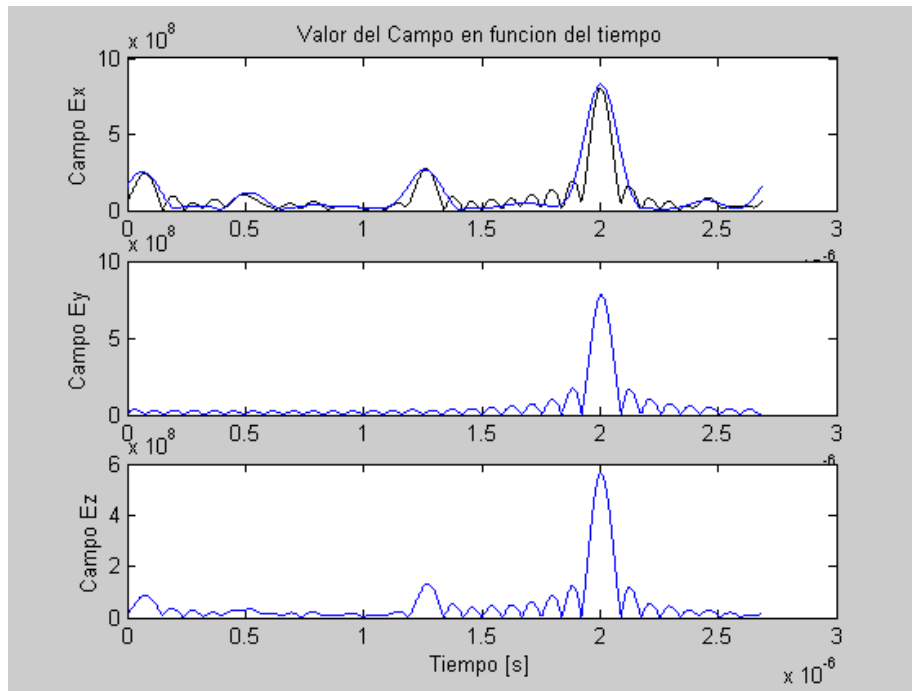


Figura 25: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Chebwin

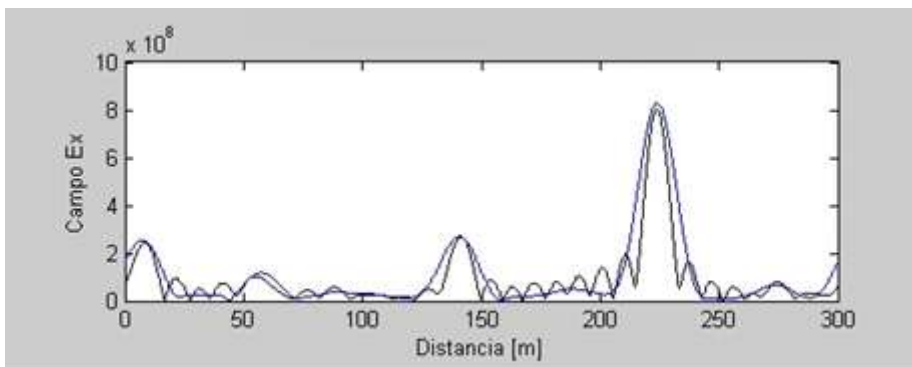


Figura 26: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Chebwin

Dos propiedades interesantes de la ventana de Chebyshev son que, para un valor determinado de N, el ancho del lóbulo principal es el menor que podría obtenerse para

una relación de ripple preestablecida (esto implica que usando esta ventana se obtienen filtros con una banda de transición muy estrecha); y que todos los lóbulos laterales tienen la misma amplitud, lo que implica que el error de aproximación tiende a distribuirse uniformemente con respecto a la frecuencia.

6.1.5 Ventana Kaiser

La ventana de Kaiser, al igual que la anterior, permite controlar independientemente la relación de ripple y el ancho del lóbulo principal. La ventana de Kaiser está dada por:

$$w_k(nT) = \begin{cases} \frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)} & \text{para } |n| \leq \frac{(N-1)}{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (122)$$

donde:

α es un parámetro independiente

$$\beta = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{(N-1)} \right)^2}$$

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right)^2 \quad \text{es la función de Bessel modificada de orden cero}$$

La amplitud máxima de sus lóbulos laterales está 69 dB por debajo de la del lóbulo principal, y el ancho de transición de este último es de 2,39 veces el de la ventana rectangular.

En las Figuras 26 y 27 puede observarse el resultado producido por aplicación de la ventana Kaiser:

6.1 FFT

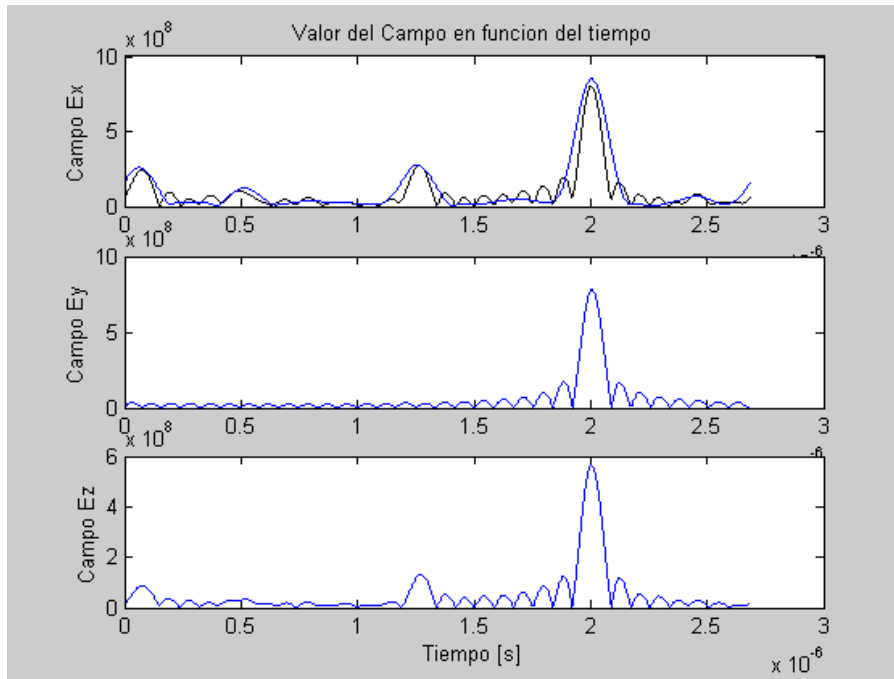


Figura 27: Valor del campo electromagnético resultado de aplicar FFT con enventanado Kaiser

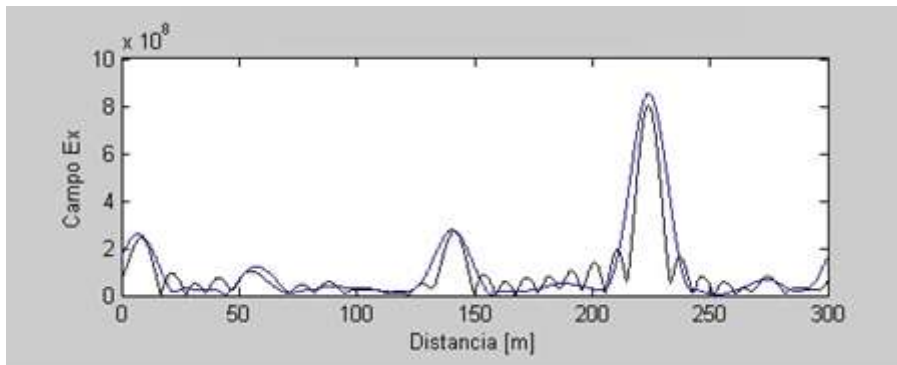


Figura 28: Estimación de distancias mediante FFT y enventanado Kaiser

La relación de ripple disminuye con el aumento de α , al tiempo que aumenta el ancho del lóbulo principal.

6.1.6 Comparación de los inventanados

A fin de poder compararlas se procede a superponer los resultados obtenidos mediante la aplicación de todas las ventanas. Esto ofrece los datos que se muestran en las Figuras 28 y 29:

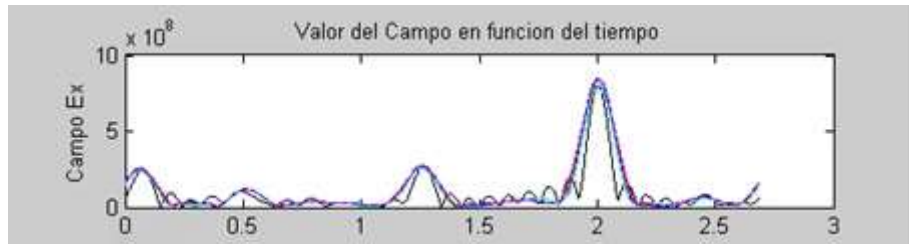


Figura 29: Valor del campo electromagnético para los distintos tipos de ventana

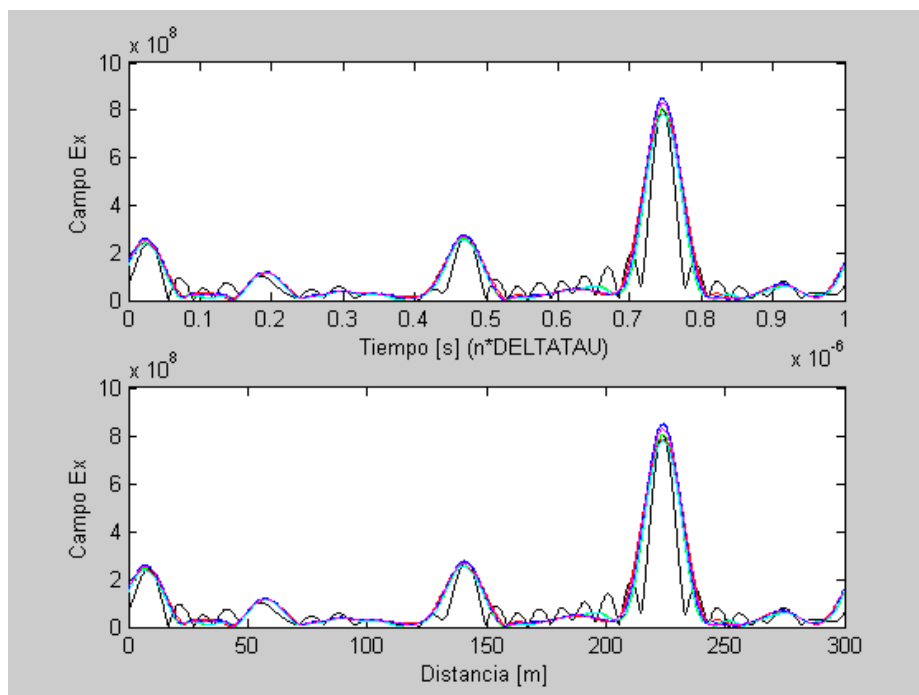


Figura 30: Estimación de distancias para los diferentes inventanados

La resolución cobra importancia en el análisis y la detección de componentes, y en aquellos casos en los que exista una energía considerable en los lóbulos laterales, el filtro atenúa las frecuencias no deseadas.

Los gráficos muestran que el método FFT no es capaz de resolver dos señales separadas por una pequeña diferencia de frecuencia. El balance entre resolución en

frecuencia y resolución dinámica es, por necesidad, una solución de compromiso. No existe una ventana que ofrezca un lóbulo principal muy estrecho a la vez que lóbulos laterales bajos. En los casos simulados, al tratarse de una única fuente y presentar una buena relación señal-ruido, todas las ventanas se mostraron adecuadas.

La necesidad de conseguir mayores resoluciones en el dominio del tiempo obliga al uso de algoritmos de estimación más complicados.

6.2 Root-MUSIC

En la Figura 31 se muestra la configuración inicial de parámetros que se utilizó para la simulación y cálculo de los campos electromagnéticos:

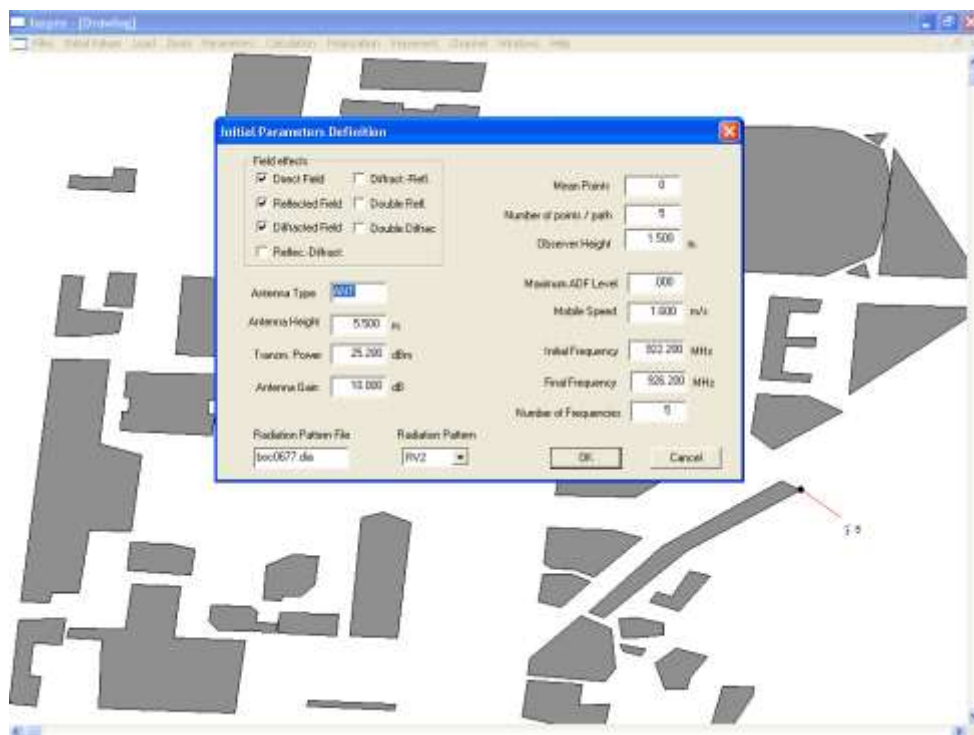


Figura 31: Definición de los parámetros iniciales de la simulación

Debido a la presencia de ruido, las raíces no tienen que estar necesariamente sobre el círculo unitario.

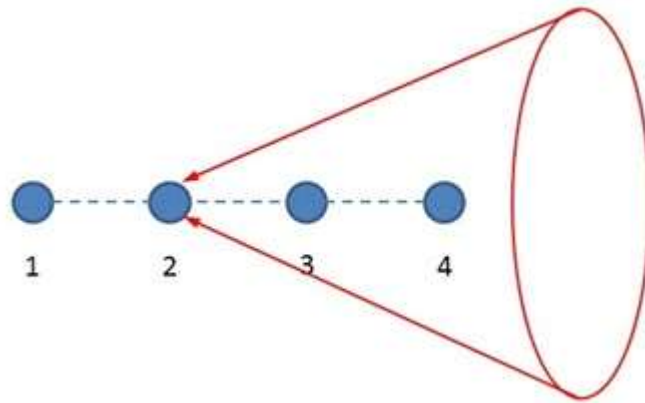


Figura 32: Ambigüedad en la estimación de la señal incidente

El resultado de aplicar el método Root-MUSIC es el que aparece a continuación:

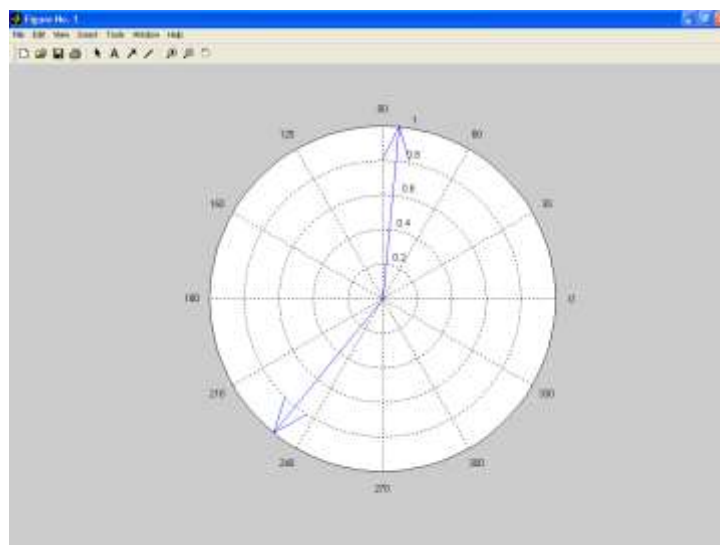


Figura 33: Gráfico resultante de la aplicación del Root-MUSIC para localización (número reducido de efectos)

Modificando la posición y orientación de la antena, tal como muestra la Figura 14, el resultado es el que aparece a continuación:

6.2 Root-MUSIC

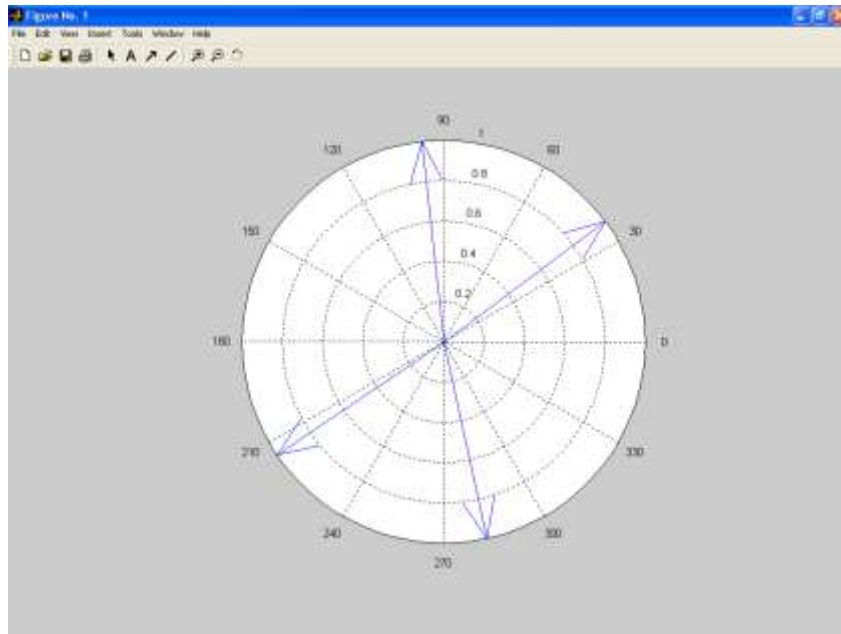


Figura 34: Gráfico resultante de la aplicación del Root-MUSIC para localización (gran número de efectos)

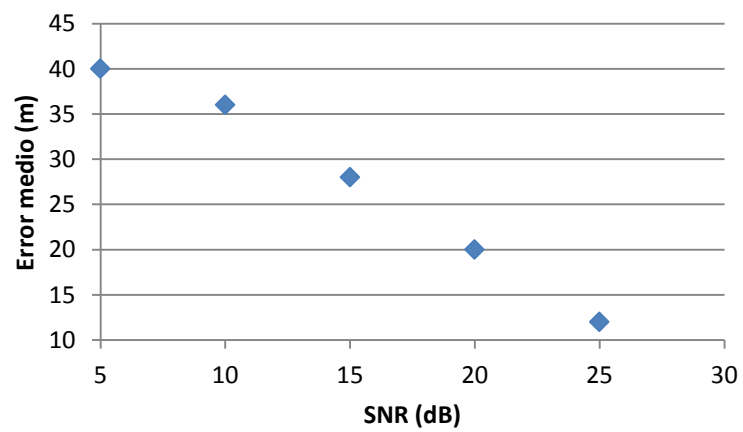


Figura 35: Error medio para una fuente situada a 250 m

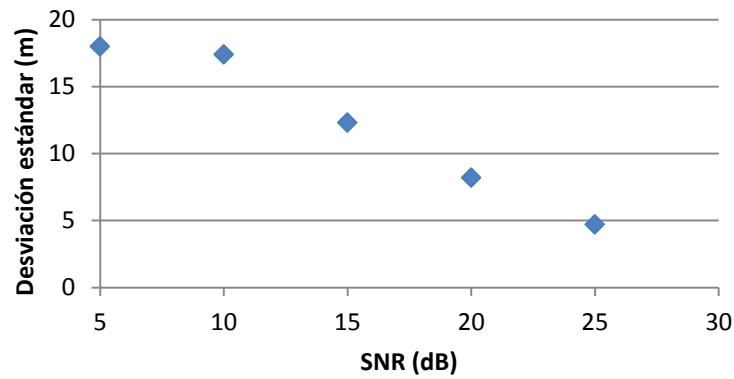


Figura 36: Desviación estándar para una fuente situada a 250 m

6.3 MUSIC

En las aplicaciones prácticas la matriz de correlación se estima a partir de las muestras de datos extraídas. La Figura 9 ilustra el diagrama en bloques del algoritmo MUSIC.

Una vez estimada la matriz de autocorrelación a partir de los datos medidos, le sigue una autodescomposición en la que se estima el parámetro L_p . A continuación se calcula el pseudo-espectro a partir del parámetro L_p , y los autovectores y autovalores. Una vez obtenido el pseudo-espectro, y mediante un algoritmo de detección de picos, se escoge el primero de los caminos y, a través de él, se estima la distancia a la fuente.

Las simulaciones por ordenador demostraron que MUSIC ofrece una muy buena resolución.

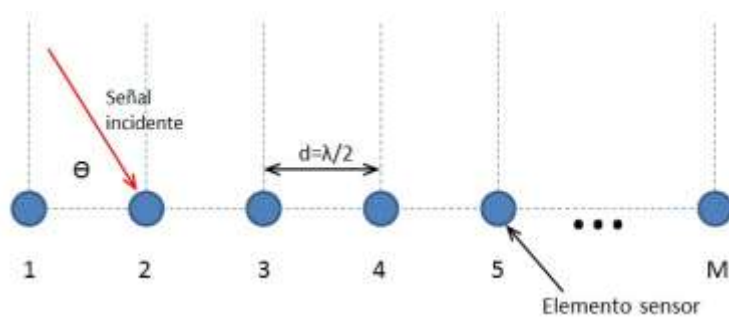


Figura 37: Señal incidente y disposición de los sensores en MUSIC

El modelo de propagación utilizado para probar y validar el algoritmo de localización es full 3D.

Para la simulación se procedió, en primer lugar, a posicionar el elemento radiante así como la dirección de su patrón. Luego se estableció el punto de observación móvil para, inmediatamente después, proceder a la ejecución de la propia emulación. A lo largo de la misma, el emisor hizo barridos a través de un rango de frecuencias con un Δf establecido previamente de acuerdo a la resolución en distancia que se perseguía.

A los datos obtenidos del programa de simulación se les contaminó con ruido blanco Gaussiano antes de proceder con la autocorrelación de la matriz, que se convertirá en la entrada del programa de cálculo de distancias desarrollado en MATLAB:

$$sigPower = \sum \frac{|sig|^2}{length(sig)} \quad (123)$$

$$sigPower = 10 * \log_{10}(sigPower) \quad (124)$$

$$noisePower = sigPower - reqSNR \quad (125)$$

$$x_{noi} = sig + wgn(size(sig,1), size(sig,2), noisePower, 1, 'dB') \quad (126)$$

Para los ensayos con MUSIC se debe determinar el número de puntos considerado necesario para evaluar la función pseudo-espectro. Por lo general, cuanto mayor es el número mayor es también la precisión, pero como se demuestra más adelante, el método es lo suficientemente robusto como para que la exactitud de los resultados no varíe significativamente con el número de puntos de evaluación.

La salida de la aplicación es la función pseudo-espectro, cuyos picos, adecuadamente adaptados, ofrecen las distancias a los elementos radiantes.

Se efectuaron múltiples y diversas simulaciones, considerando distintos tipos de ondas incidentes y saltos de frecuencia (siempre dentro de los márgenes que permitían resolver las distancias con las que trabajábamos)

Se consideraron los siguientes casos:

1. Variación de la potencia de ruido
2. Variación del número de muestras utilizadas para extraer la matriz de correlación de la señal recibida

3. Variación del número de puntos utilizados para evaluar la función pseudo-espectro

En todos los casos se intentó determinar la fortaleza del algoritmo con relación a esas variables. La Figura 14 representa una vista cenital del centro urbano donde se efectuaron las simulaciones, manifestando claramente la posición de la antena y la dirección de su lóbulo principal, así como la ubicación de la unidad móvil.

Las figuras que siguen a continuación muestran los resultados de las simulaciones:

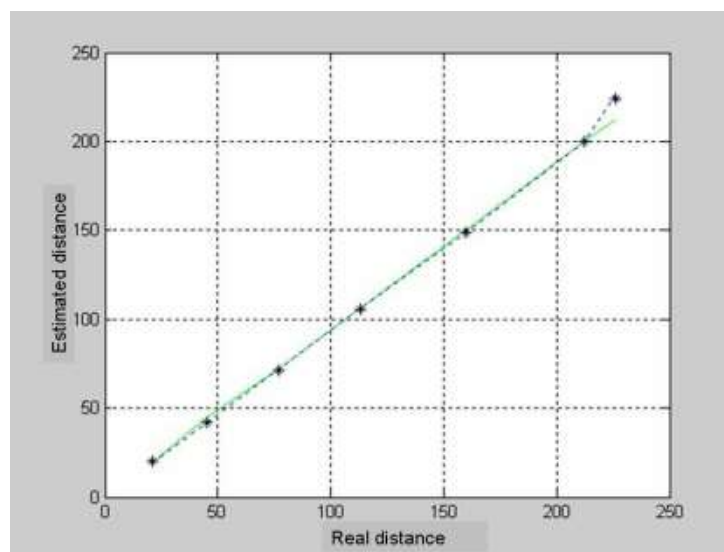


Figura 38: Resultados obtenidos para distintos niveles de ruido: con - $SNR=30dB$; con * $SNR=3dB$; con : $SNR=60dB$

Para el primer escenario el error es despreciable dentro del primer tercio de la ventana de resolución, cualquiera sea la condición. Lo mismo sucede para S/N pequeñas al acercarnos al límite de la ventana. Para las otras distancias el máximo error fue de un 9% en defecto, independientemente de la S/N .

6.3 MUSIC

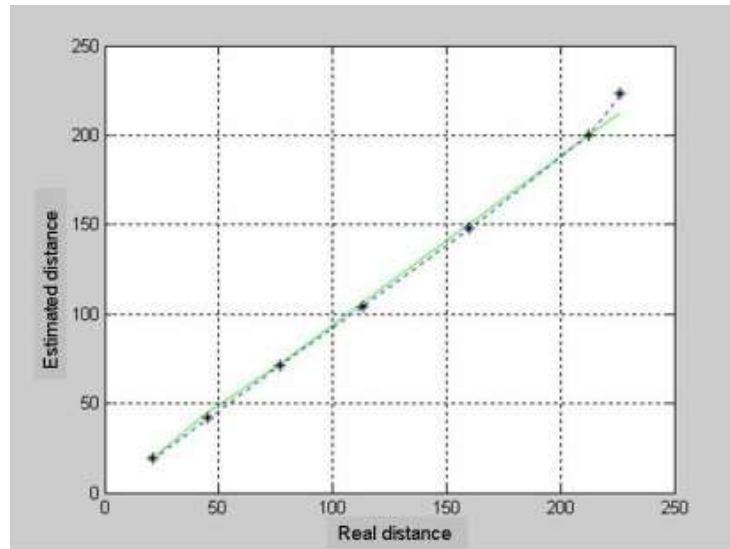


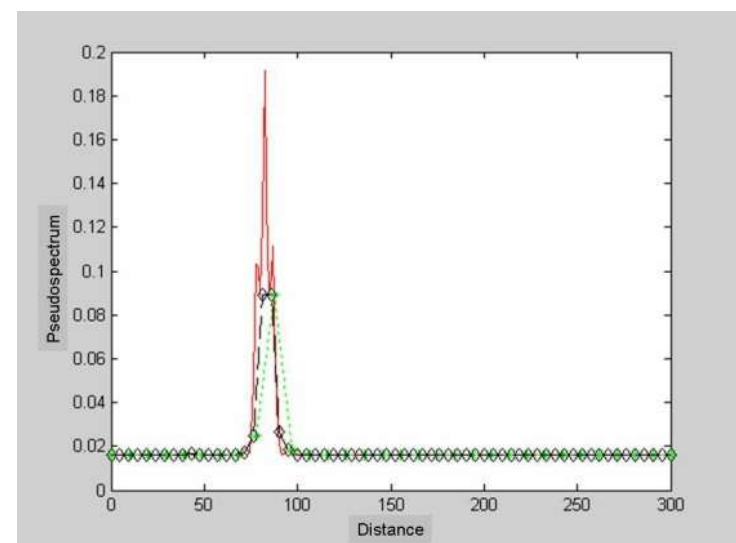
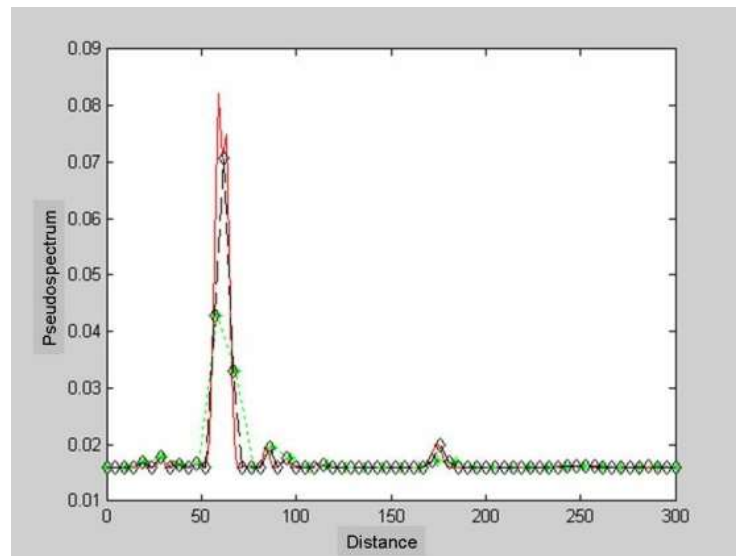
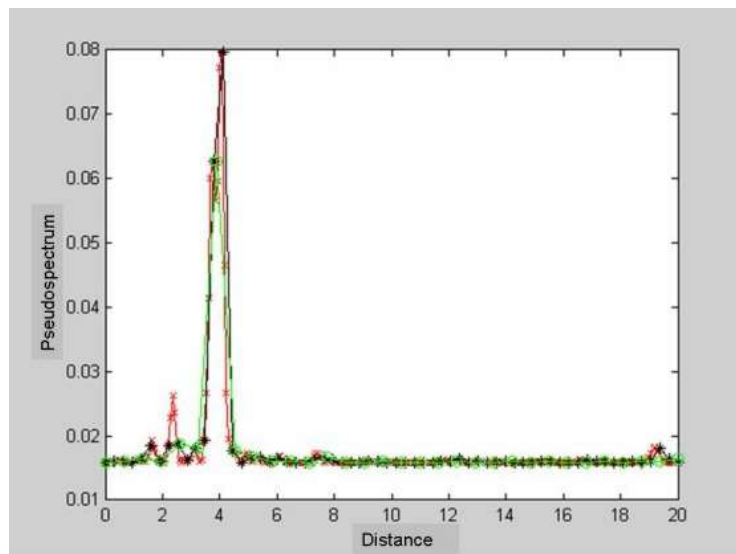
Figura 39: Resultados obtenidos para distintos volúmenes de datos: con - 100 muestras; con * 10 muestras; con : 3 muestras

La Figura 39 muestra la degradación del desempeño del algoritmo MUSIC en función del número finito de muestras. Si se aumenta el número de estas, mejora la estimación de la matriz de correlación y, por consiguiente, se obtiene una mayor precisión en la estimación de las frecuencias de la señal.

En la Figura 40 se compara el desempeño en la estimación de frecuencias del algoritmo MUSIC calculando la función del pseudo-espectro con 256, 64 y 32 puntos. Resulta evidente que cuando aumenta el número de puntos, las frecuencias estimadas se aproximan más a los valores de la señal verdadera y aumenta también la altura de los picos de MUSIC.

Modificando el número de muestras del campo electromagnético vemos que la respuesta es similar a que sucede con la S/N. Si no se tienen en cuenta los extremos de la ventana de resolución, la mayoría de las muestras ofrecen precisión en el primer tercio. Los resultados llegan luego a degradarse hasta en un 6% en defecto, pero permanecen ligeramente más precisos que para los casos en que se emplea un menor número de muestras.

Simulaciones



6.3 MUSIC

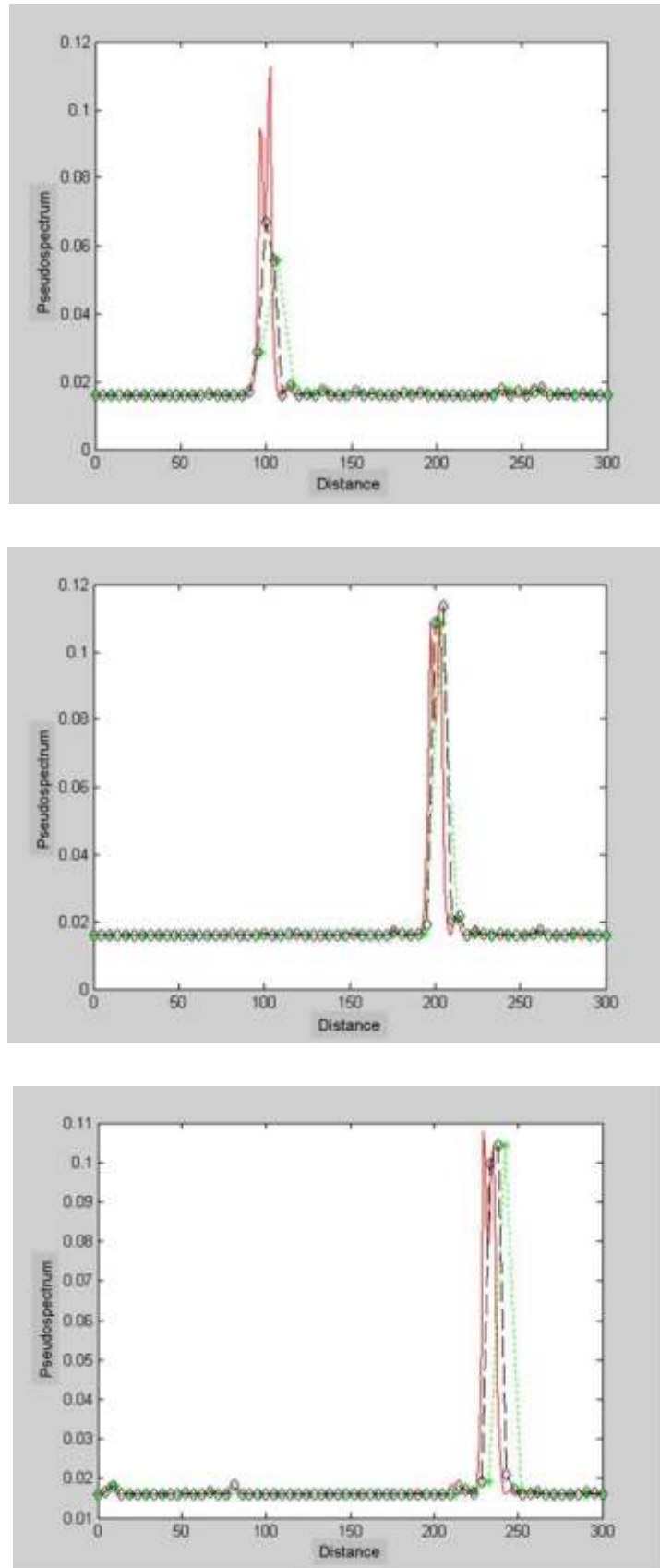


Figura 40: Efecto producido al variar el número de puntos utilizado para calcular el pseudo-espectro para diferentes distancias de la unidad móvil a la antena: con x -> 256, with * -> 64, con o -> 32

En el último de los supuestos, la variación del número de puntos utilizado para evaluar la función pseudo-espectro actúa como se explica a continuación: cuanto menor es el número de muestras, mayor es la protección contra falsos positivos; pero al mismo tiempo aumenta la incertidumbre en la localización de los puntos radiantes. Por el contrario, cuanto mayor es el número de muestras, mayor es la precisión en la localización de esos puntos. En todos los casos la precisión está por encima del 10%.

6.4 Matrix-Pencil

La ecuación (127) hace referencia a la muestra i^{th} y asume la no existencia de ruido. Busca caracterizar el argumento de las exponenciales complejas (M en este caso):

$$x_i = \sum_{l=1}^M |h_l| e^{((\alpha_l + j\omega_l)(i-1) + \phi_l)} \quad i=1 \dots N \quad (127)$$

Para estimar las M frecuencias ω_i $i=1, \dots, M$ (asumiendo que α_i es igual a cero, es decir exponenciales complejas sin componente real) que definen el vector de señal \mathbf{x} , se debe resolver el problema generalizado de autovalores / autovectores que aparece en (65) Se generan entonces los arreglos \mathbf{G}_2 y \mathbf{G}_1 [59] [35]

El siguiente paso es hallar los autovectores ξ_i (uno por cada señal detectada) para luego enfocarnos en la relación entre los autovectores y los argumentos de las exponenciales.

Puesto que $\xi_i = e^{j\omega_i}$, lo que se obtiene con Matrix Pencil es $e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_N}$, siendo:

$$\xi_1 = e^{j\omega_1}$$

donde ω_1 es el argumento exponencial, excepto por el término $(i-1)$

Se espera que el primer autovalor sea el que corresponda al rayo directo (el que conduce a un autovalor más elevado) o, lo que es lo mismo, el que ofrece la menor distancia. El cálculo de la pseudo inversa determina la amplitud, asociando el término mayor al rayo directo.

En la descripción que sigue a continuación, y que esquematiza la Figura 41, se asume que dos rayos reflejados alcanzan el punto de observación. La inclusión de otros efectos es inmediata. La distancia que separa a la fuente del punto de observación es $R1$; en su viaje la onda sufre una reflexión en la superficie A, recorriendo una distancia $R11$. En el modelo a considerar se tiene en cuenta también una segunda reflexión en el área B, lo que da lugar a la distancia $R21$. El valor a determinar es $R1$.

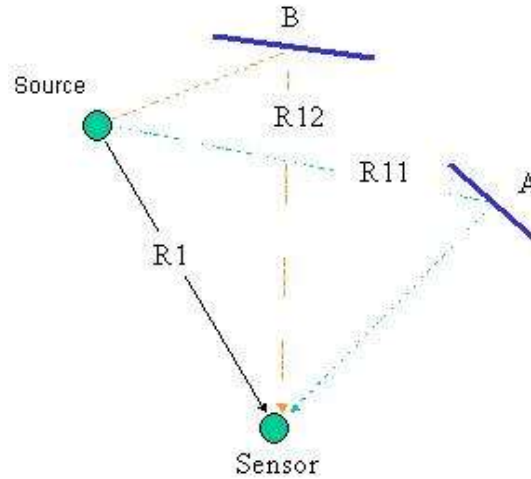


Figura 41: Esquema que muestra las posiciones relativas de la fuente y el sensor

Para demostrar el rendimiento del algoritmo Matrix Pencil en la estimación de la localización de elementos radiantes en interiores o exteriores, se realizaron numerosas simulaciones en FASANT, que permitieron obtener importantes datos. Se configuraron 32 frecuencias, que jugaron el papel de otros tantos sensores, con una separación de 1 MHz entre ellas.

Se trata de transformar la estimación Matrix Pencil que da los valores de $R1$, además de $R11$ y $R12$, en distancias.

La frecuencia de la onda i^{th} es:

$$f_i = f_0 + \Delta f \cdot (i-1) \quad (128)$$

La señal que se obtiene entonces para esta frecuencia (que es la que sale de FASANT) seguirá este modelo:

$$E_i = E_i e^{\frac{-j2\pi}{c} \cdot f_0} \left(e^{\frac{-j2\pi}{c} \cdot \Delta f \cdot D_1(i-1)} + R_A e^{\frac{-j2\pi}{c} \cdot \Delta f \cdot D_{11}(i-1)} + R_B e^{\frac{-j2\pi}{c} \cdot \Delta f \cdot D_{12}(i-1)} \right) \quad (129)$$

siendo E_i el campo incidente y R_A y R_B los coeficientes de reflexión en las áreas A y B.

Matrix Pencil asume que la amplitud de las ondas que llegan es la misma para todos los valores de i , por lo que se debe comprobar que, para esos saltos de frecuencia, la amplitud no varíe de forma significativa.

Para obtener resultados se simularon distintos entornos en los que producir multi-caminos, con diferentes longitudes y ángulos de llegada. A lo largo de todas las simulaciones se pudo comprobar que, si dos de las exponenciales complejas a detectar estaban demasiado próximas entre sí, esto ponía en dificultades a Matrix Pencil.

Las simulaciones se llevaron a cabo sobre la base de un barrido de frecuencias, partiendo de una frecuencia inicial y llegando a un valor final. Dentro de este conjunto de frecuencias la amplitud que se extrae del programa GTD permitió asegurar que el modelo de señal escogido era el correcto, es decir, que en el campo recibido los cambios se debían únicamente al término correspondiente a la fase.

La Figura 42 ilustra la efectividad del algoritmo Matrix Pencil, que es capaz de generar una estimación precisa siempre que las señales no se encuentren demasiado próximas unas a otras. Matrix Pencil se ve seriamente influido por la proximidad de las exponenciales complejas a detectar. Cuando estas se encuentran muy próximas entre sí, producen una gran diversidad en la respuesta.

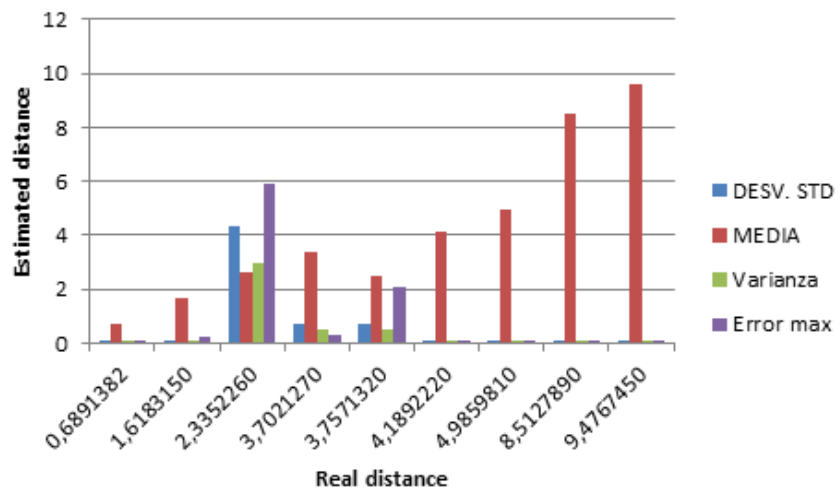


Figura 42: Efectividad del algoritmo Matrix Pencil

La Figura 43 muestra los cambios que experimenta la desviación estándar en función del número de frecuencias, del intervalo de frecuencia de la muestra y del parámetro Matrix Pencil. En general la desviación estándar disminuye con el parámetro Matrix Pencil y aumenta cuando lo hace el intervalo entre frecuencias.

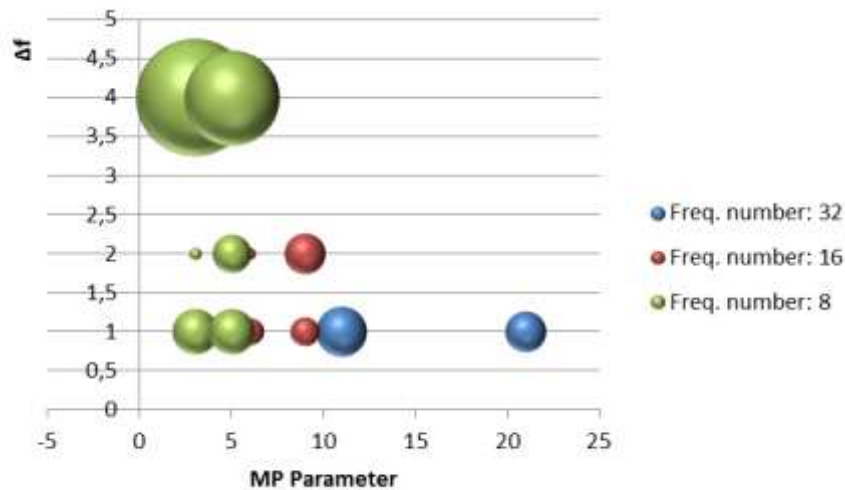


Figura 43: Cambios en la Desviación Estándar

La Figura 44 muestra el comportamiento de la varianza. Esta presenta una fuerte dependencia con el número de frecuencias de la muestra así como con el intervalo entre esas mismas frecuencias. Su valor disminuye cuando consideramos un menor número de frecuencias y cuando el intervalo entre ellas se hace más pequeño.

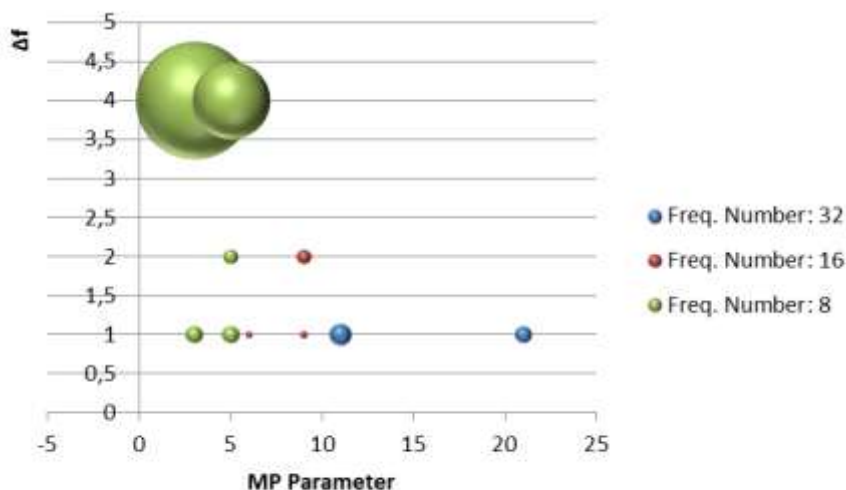


Figura 44: Comportamiento de la Varianza

La Figura 45 representa los errores máximos que se han obtenido a lo largo de todo el proceso de simulación. Aparece expuesto con claridad el problema que tiene Matrix Pencil cuando se trabaja con complejos exponenciales muy próximos. Sin embargo, en condiciones normales, el error se mantuvo por debajo del 1,9%

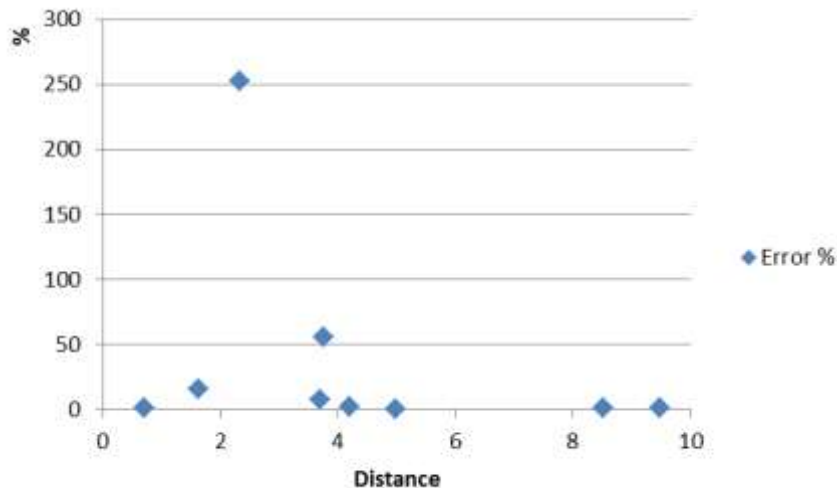


Figura 45: Errores máximos

6.5 Especificaciones

Los distintos casos simulados aparecen descriptos a continuación:

- Variación del número de señales manteniendo fijo el número de elementos del arreglo
- Variación de la potencia del ruido (modificando la SNR)
- Variación del número de muestras temporales que se utilizan para encontrar la matriz de correlación promediada en tiempo de la señal recibida (se varía el número de muestras utilizadas para estimar la matriz de correlación de las señales incidentes; un mayor número de muestras debería mejorar la resolución espacial del algoritmo)

En todos los casos las señales incidentes no guardan correlación.

A fin de evitar los efectos de campo próximo, la distancia de referencia deberá escogerse de forma tal que se encuentre dentro de la región de Fraunhofer. De otro modo los efectos de campo próximo pueden alterar las pérdidas del camino de referencia. La

distancia de campo lejano la define la dimensión de la antena de transmisión y la frecuencia de operación, y viene dada por:

$$d = \frac{2D^2}{\lambda} \quad (130)$$

donde D es la dimensión máxima de la antena transmisora y λ es la longitud de onda a la frecuencia de operación.

En todas las simulaciones se ha supuesto que la estación radiante permanece inmóvil.

El barrido del canal en el dominio de la frecuencia se hizo con un valor inicial de 900 MHz y una frecuencia máxima de 932 MHz, con un número variable de muestras. Se almacenaron la magnitud y la fase de las respuestas en frecuencia obtenidas en las mediciones para usarlas más adelante en los procesos posteriores.

Es bien sabido que aumentando el ancho de banda del sistema se mejora la resolución en el dominio del tiempo y, como resultado de esto, aumenta también la precisión de la estimación del TOA [47] En aquellos casos en que el ancho de banda viene establecido, se tienen que buscar otras alternativas si lo que se persigue es la mejora de la precisión. Una de esas prácticas alternativas es hacer uso de técnicas de procesamiento posterior de los datos en el dominio de la frecuencia.

Con los datos disponibles se puede procesar el perfil del canal en el dominio de la frecuencia para obtener su perfil en el dominio del tiempo mediante el uso de la transformada inversa de Fourier (IFT)

6.6 Enfoque

En esta tesis se ha buscado la localización de fuentes radiantes distribuidas en entornos urbanos y de interiores bajo la perspectiva de reconstrucción de la señal.

El trabajo parte del análisis de cobertura. Para conducir el estudio de respuesta al impulso vectorial / firma espacial, se utilizó un programa de cálculo de cobertura. La herramienta escogida fue FASANT, válida tanto para exteriores como para interiores, desarrollada por el Departamento de Teoría de Señal y Comunicación de la Universidad de Cantabria.

Las estructuras arbitrarias se modelaron por medio de facetas planas o superficies canónicas simples, como cilindros o esferas, cuyo coste computacional es muy inferior al que presenta el modelado por superficies paramétricas que, en cambio, permitieron representar objetos complejos con un menor número de superficies y alta precisión.

El método clásico para la búsqueda de firmas espaciales está basado en la aplicación directa de la transformada de Fourier sobre los datos. Lamentablemente en aplicaciones reales la cantidad de información capturada está limitada por la velocidad finita de muestreo que presentan los sistemas de adquisición de datos. Esta limitación se traduce en que mediante la aplicación de los algoritmos basados en la estimación clásica, no va a ser posible distinguir aquellas señales suficientemente próximas. Para remediar esto surgen los métodos de gran resolución, cuya filosofía se basa en el modelo subyacente de señal, es decir, suponen que los datos se ajustan a un modelo cuyos parámetros contienen la información a estimar.

La aproximación seguida ha sido la de alimentar los métodos ya existentes con los vectores de campo o con los datos de la matriz de covarianza en el punto de observación, en función del método a utilizar, ofreciendo a la vez alternativas para poder mejorar la precisión obtenida.

Para el cálculo del campo se hace necesario realizar un trazado de rayos que permita saber si un rayo va a ser interceptado por una superficie y para conocer si hay campos reflejados y difractados que alcancen el punto de observación. El empleo del trazado de rayos hace posible un nivel de precisión, control y reproductibilidad imposible de conseguir mediante cualquier otra medición convencional. Los parámetros de simulación pueden mantenerse bajo estricto control y proceder a la variación de cualquiera de ellos, de forma individual, de forma que nos permita aislar su efecto sobre el desempeño del sistema. Las mediciones resultantes del empleo del trazado de rayos consiguen una resolución mucho más alta que la que se puede obtener de forma confiable a través de mediciones de campo. Tampoco hay que olvidar que la tecnología de trazado de rayos que se utiliza para simular la propagación del canal es utilizable en cualquier entorno, sea este de interiores, exteriores, urbano, rural, etc.

La comprobación se efectuó simulando entornos conocidos de una zona céntrica de la Villa de Madrid, y verificando que las predicciones daban las posiciones exactas de los emplazamientos radiantes.

Para el desarrollo de la tesis se hizo uso de programas de diseño asistido por ordenador, como AUTOCAD, además de programas de cálculo matemático como MATLAB y MATCAD.

6.7 Resultados

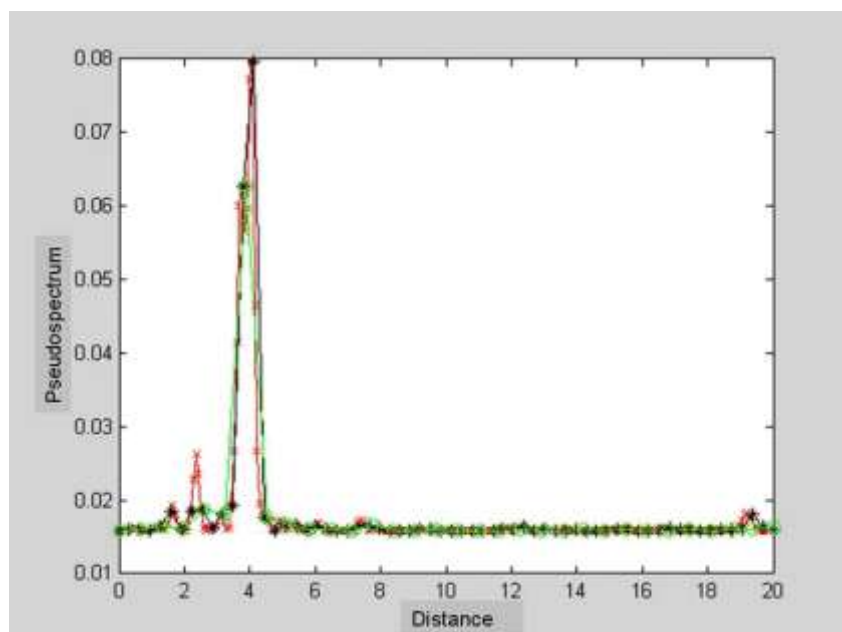
A continuación se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante la aplicación de algoritmos de super-resolución, con la de aquellos conseguidos a través de la transformada inversa de Fourier (IFT) y entre ellos mismos. Para medir el desempeño de los algoritmos se pueden utilizar distintas métricas. En esta tesis se consideran tanto la SNR, como el número de muestras, el tiempo de cómputo y parámetros estadísticos como varianza o error cuadrático medio.

El desempeño de los algoritmos de super-resolución se ha medido mediante simulaciones computarizadas y sus resultados fueron comparados con los valores reales en escenarios variados. Los resultados de las simulaciones muestran las características de cada uno de los métodos. La respuesta de frecuencia compleja se calculó mediante la simulación de los canales.

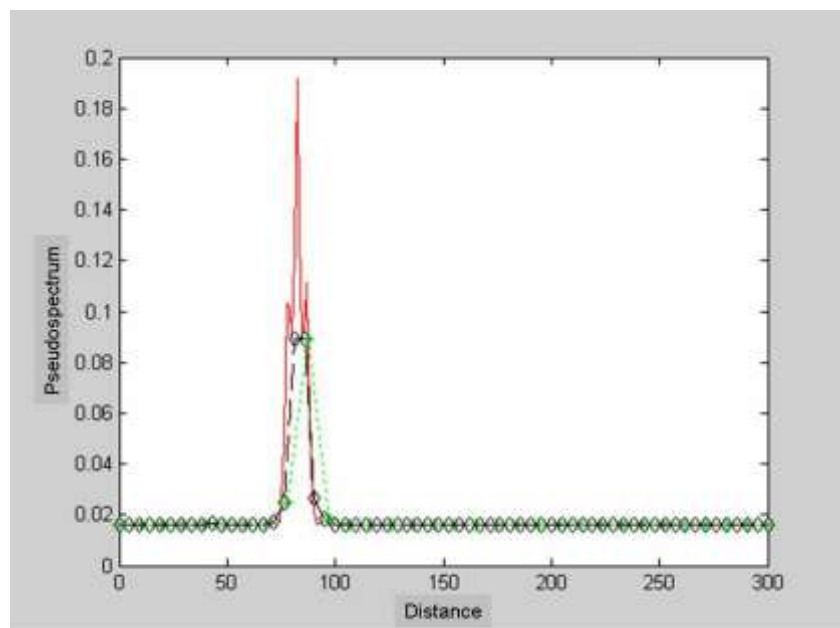
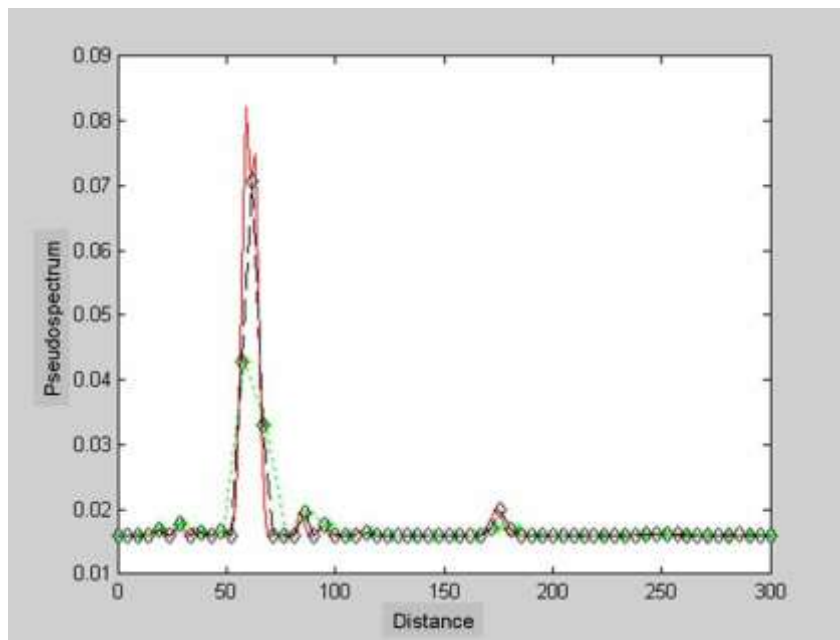
Del análisis de los resultados surgen las siguientes conclusiones:

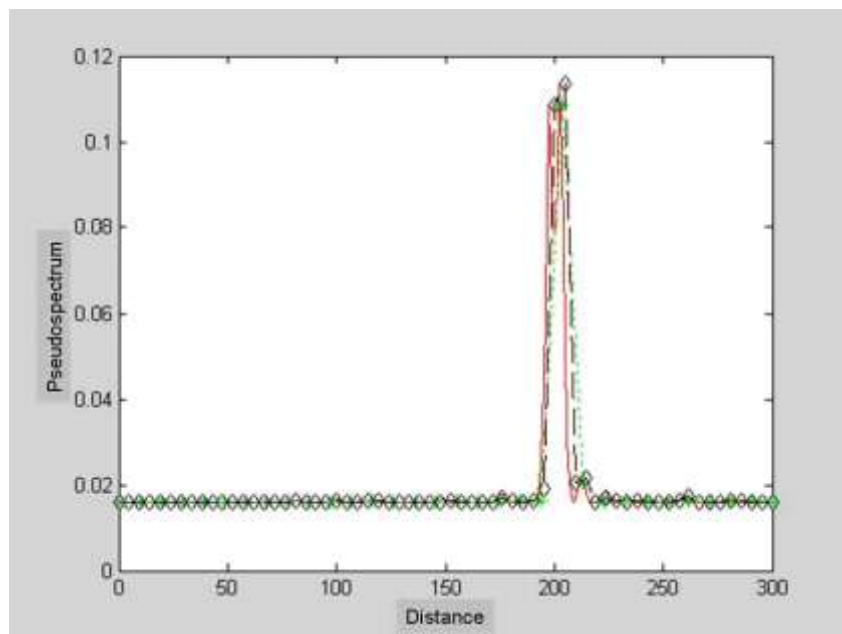
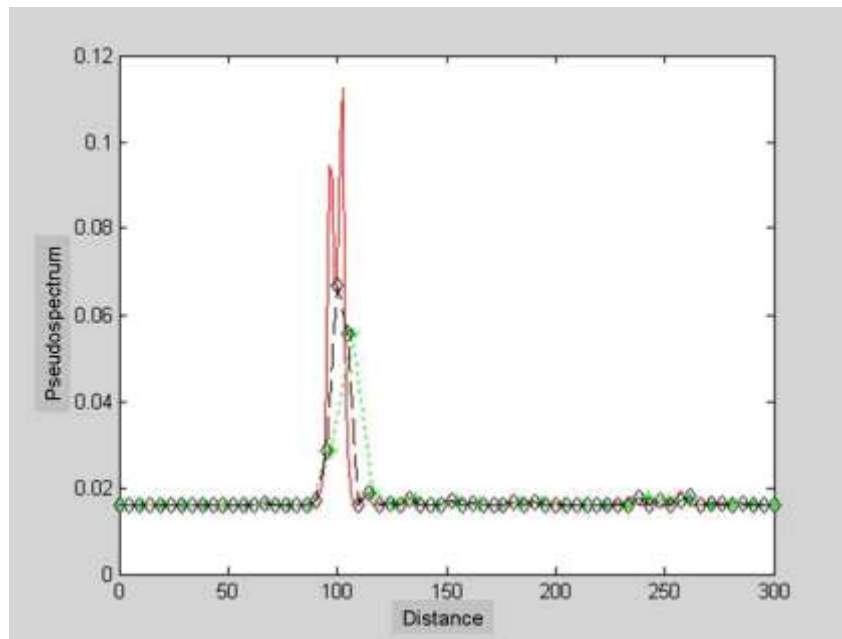
- Si se lo compara con los métodos convencionales el algoritmo Root-MUSIC ofrece una mejor resolución espacial.
- La varianza estimada por Root-MUSIC aumenta cuando la separación angular se hace más pequeña.
- Root-MUSIC no ofrece una buena robustez al ruido y, como resultado de ello, si baja la SNR aumenta la varianza.
- Un aumento en el número de muestras produce una mejor estimación de la matriz de correlación y, como consecuencia de ello, disminuye la varianza de la estimación.
- Tanto Root-MUSIC como Matrix Pencil ofrecen estimaciones muy precisas, con bajos valores de error cuadrático medio.
- Las técnicas de super-resolución MUSIC permiten mejorar la estimación ToA/DoA, transformando los datos de la frecuencia que se corresponde con el pico de correlación al dominio temporal, ofreciendo una imagen de los tiempos de llegada de los componentes multi-camino de la señal.
- Así mismo y como era de esperar, la resolución que ofrece MUSIC excede con mucho la de IDFT

- El algoritmo Root-MUSIC demanda el doble del tiempo de ejecución que MUSIC y tiene un error cuadrático medio (MSE) considerablemente mayor.
- El error cuadrático medio (MSE) en MUSIC disminuye de forma constante con el incremento del número de sensores.
- El hecho de que MUSIC necesite de varias muestras implica que consume un tiempo importante estimando de forma repetida el canal y, al permanecer este invariable, la coherencia en las distintas señales que llegan a través de diversos caminos, hace que aparezcan errores de estimación.
- El algoritmo Matrix-Pencil ofrece importantes ventajas con respecto a las técnicas basadas en la matriz de covarianza: solo necesita estimar el canal una vez, puede aplicarse en aquellos escenarios que ofrecen coherencia a causa del multi-camino, y sirve también para aplicar a aquellos canales que varían de forma rápida.
- En las simulaciones se pudo comprobar que en aquellos casos donde dos señales estaban muy próximas entre sí, el espectro de MUSIC mostraba un único pico, mientras que el correspondiente polinomio Root-MUSIC exhibía claramente dos ceros de la señal. La probabilidad de resolución es, por tanto, mayor en Root-MUSIC que en MUSIC espectral.
- Matrix Pencil ofrece un mejor comportamiento que Root-MUSIC en términos de error cuadrático medio y probabilidad de resolución (en particular cuando la SNR es baja); aunque este le supera cuando las señales están muy próximas en el espacio.



6.7 Resultados





6.7 Resultados

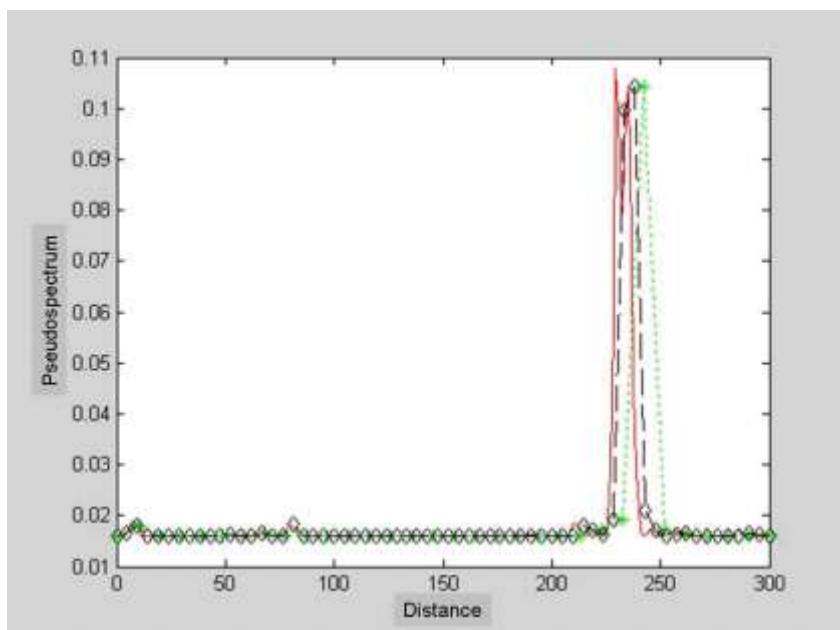


Figura 46: Cálculo del pseudo-espectro, mediante MUSIC, para varias distancias

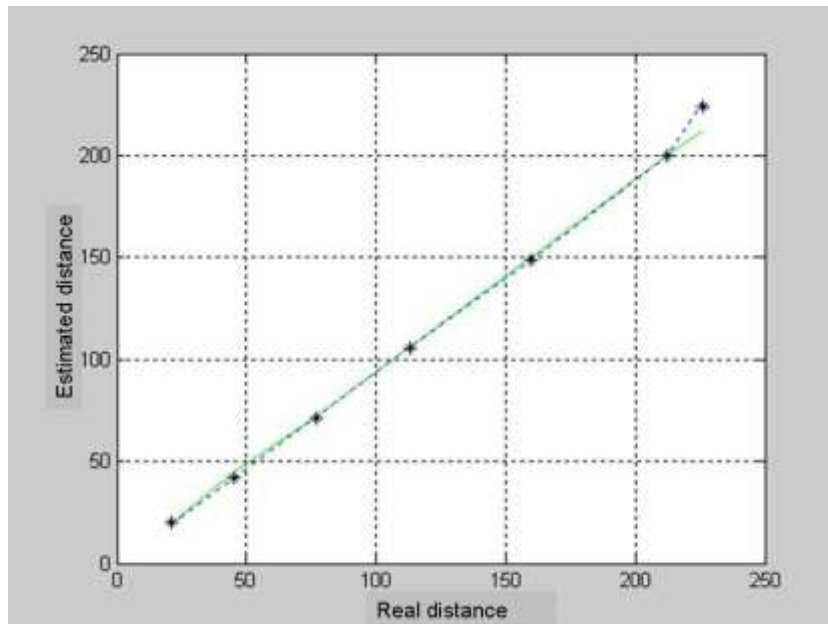


Figura 47: Error en función de la distancia a la fuente para distintos niveles de ruido utilizando MUSIC:
con - SNR=30dB; * SNR=3dB; : SNR=60dB

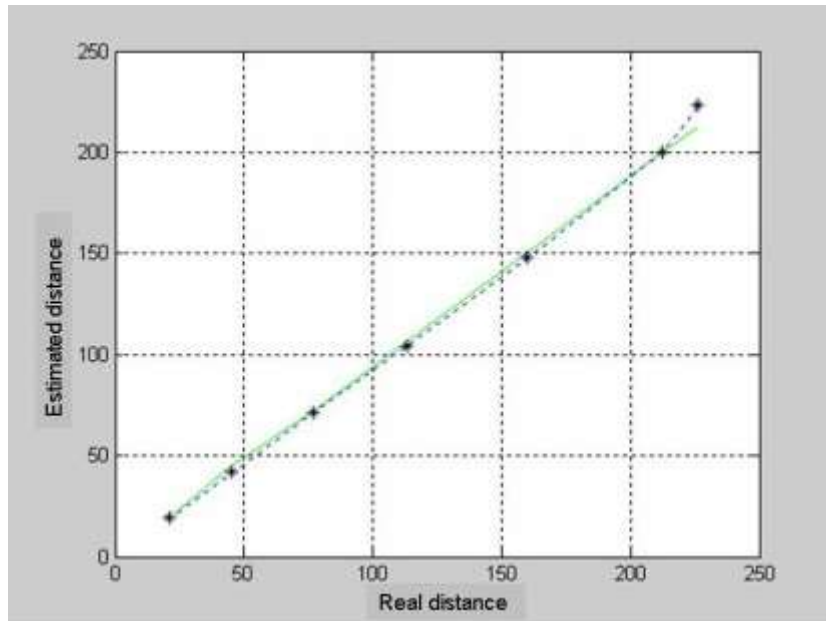


Figura 48: Error en función de la distancia a la fuente para distintos volúmenes de datos utilizando MUSIC: con - 100 muestras; * 10 muestras; : 3 muestras

Aunque el tiempo de ejecución del algoritmo MUSIC es lo suficientemente pequeño como para poder emplearse en escenarios de tiempo real, la Figura 49 demuestra que el rendimiento (tiempo de cálculo) del algoritmo Matrix Pencil en comparación con MUSIC y Root-MUSIC, es muy superior, lo que le favorece enormemente a la hora de hacerlo atractivo para aplicaciones en tiempo real.

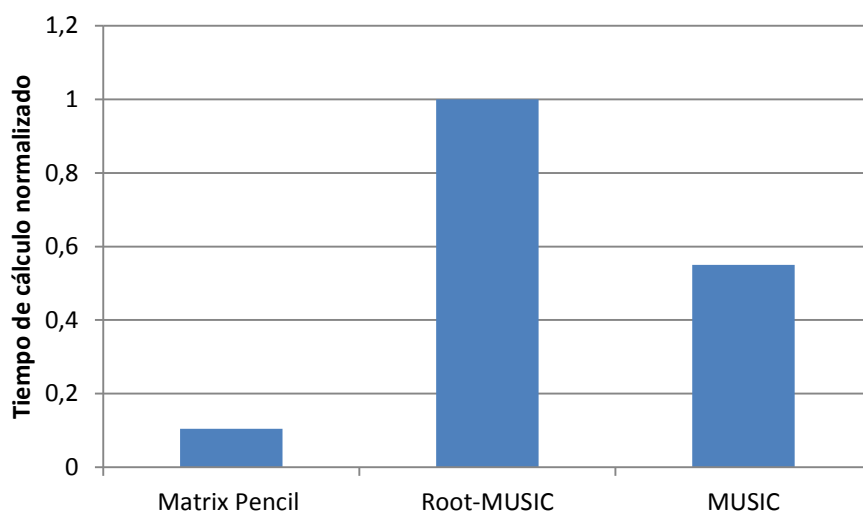


Figura 49: Comparativa de los tiempos de cálculo

Con un número suficiente de muestras, los algoritmos del tipo MUSIC dan resultados bastante precisos. Sin embargo hay dos factores que limitan su uso en aplicaciones en tiempo real. En primer lugar, la complejidad del cómputo de los algoritmos de subespacio de ruido es, por lo general muy importante, puesto que las operaciones para estimar la matriz de covarianza y sus raíces son bastante costosas. Para llevar a cabo esas operaciones se hace necesario disponer de un hardware sofisticado, lo que aumentaría el coste de producción y haría más difícil su utilización en aplicaciones en tiempo real. Por último se necesita de varias muestras para lograr que los algoritmos de subespacio de ruido den estimaciones precisas.

Se demostró también que, trabajando con MUSIC, la cantidad de datos o número de muestras en un determinado intervalo de tiempo que se utilizan para considerar la matriz de correlación, no mejoran considerablemente la resolución espacial del algoritmo, lo que demuestra que el método es robusto aún con pequeñas cantidades de datos.

La gran ventaja que ofrece el empleo de Matrix Pencil es que al no tener que estimar ninguna matriz de covarianza ni hallar las raíces polinómicas, su complejidad de cómputo es mucho menor que la de los algoritmos de subespacio de ruido. También hay que decir a su favor que Matrix Pencil da buenos resultados incluso con una única muestra, lo que lo posiciona estupendamente para aquellos casos de aplicaciones en tiempo real.

En Root-MUSIC la relación entre el número de muestras y rendimiento se debe a que este algoritmo necesita de un número mínimo de muestras para obtener una estimación de la matriz de covarianza espacial.

El tiempo de cálculo del Root-MUSIC mejora cuanto menor es el número de muestras, lo que demuestra claramente que, cuando aumenta el número de muestras, lo que se vuelve dominante en términos del tiempo de cálculo es el coste computacional de estimar la matriz de covarianza.

En el caso de Matrix Pencil se puede decir que el mayor número de muestras apenas le afecta. Esto se debe a que la carga computacional, más que del número de muestras, depende fundamentalmente del parámetro Pencil (L)

El algoritmo Matrix Pencil presenta varias e importantes ventajas, de las que la más significativa es que, a diferencia de las técnicas basadas en la matriz de covarianza, Matrix Pencil necesita de solo una estimación del canal, y que puede aplicarse en escenarios multi-camino coherentes así como en canales que varían relativamente rápido con el tiempo.

Capítulo 7

Conclusiones

La estimación de localización de fuentes radiantes ha recobrado importancia no solo por razones de seguridad y para satisfacer los requerimientos de la FCC, sino también como habilitador para la oferta de nuevos servicios, que son ahora posibles gracias a la consumerización de dispositivos móviles de alta tecnología. Las técnicas basadas en RF y la utilización de los algoritmos de super-resolución han demostrado ser soluciones viables en la práctica.

El objetivo de esta tesis ha sido la mejora de las técnicas para conseguir una localización precisa y con bajo tiempo de cálculo. En ella se presenta la aplicación de los algoritmos de super-resolución (MUSIC, Root-MUSIC y Matrix Pencil) para la estimación de distancias a fuentes radiantes en entornos interiores y exteriores indistintamente.

La simulación y los resultados experimentales muestran que estos algoritmos pueden estimar con precisión la distancia a esas fuentes y que ofrecen un rendimiento superior al que puede alcanzarse con la técnica de la transformada de Fourier. También se ha podido comparar la complejidad computacional de las distintas técnicas propuestas.

Para desarrollar estimaciones en aplicaciones tanto de interior como de exteriores, los algoritmos fueron aplicados a respuestas complejas en frecuencia.

Se llevaron a cabo intensas series de simulaciones cuyos resultados experimentales resaltan la alta resolución de los algoritmos, demostrando el mejor desempeño de aquellos de super-resolución en comparación con las técnicas IFT convencionales. Dentro de estos, el rendimiento computacional de Matrix Pencil se mostró claramente superior al resto. En interiores, en aquellos casos donde no existe un camino directo dominante para la señal que alcanza el arreglo, los algoritmos de super-resolución han demostrado ser mucho más precisos que las técnicas IFT. La razón para

esto es que estos algoritmos tienen la capacidad de ver el perfil del canal con una mayor resolución, y como en esta categoría de interiores el camino más corto aparece por lo general combinado con los que le siguen inmediatamente formando un cluster, un algoritmo convencional detecta el pico de este y asume que se trata del camino directo, calculando en base a esto la distancia a la fuente. Esto es lo que provoca el error en la estimación. Sin embargo los algoritmos de super-resolución son capaces de separar el cluster y mostrar otros caminos indetectables por el modo convencional.

El análisis experimental sobre datos simulados demostró también que la técnica MUSIC ofrece una gran resolución, con el mínimo nivel de lóbulos laterales y gran robustez al ruido y a la limitación en el volumen de datos.

La experimentación con el algoritmo Matrix Pencil para localizar fuentes emisoras ha dado resultados interesantes. El poder de este estimador descansa en el hecho de que el algoritmo Matrix Pencil es muy eficiente y trabaja bien incluso cuando solo se dispone de una única muestra.

Su análisis permite concluir que se trata de la opción ideal para aplicaciones en tiempo real, por encima del resto de algoritmos, puesto que estos, por lo general, consiguen precisión a cambio de velocidad y vice versa.

Matrix Pencil ha mostrado ser una técnica más efectiva que MUSIC, superándole en resultados. Con solo una muestra, Matrix Pencil es capaz de identificar con precisión la longitud de todos los componentes multi-camino. Esta capacidad le abre las puertas al desarrollo de nuevas aplicaciones, como por ejemplo, las relacionadas con el receptor RAKE [13]

El método Matrix Pencil ofrece menores varianzas de los parámetros que otros métodos y se comporta muy bien en presencia de ruido. El proceso de simulación se hace prácticamente en tiempo real, ya que estamos hablando de un algoritmo muy rápido, lo que puede traducirse como que la versión Matrix Pencil se adapta a implantaciones en hardware mediante el uso de chips DSP operando en tiempo real.

En cuanto a la robustez con respecto al ruido, partiendo de los resultados experimentales se concluye que la capacidad analítica del algoritmo MUSIC no disminuye significativamente con la SNR así como que el comportamiento de Matrix Pencil es muy satisfactorio.

Finalmente, los resultados de las simulaciones exceden los requerimientos de la FCC, que reclama de los proveedores de servicio la capacidad de localizar fuentes con una precisión de 100 m en el 67% de los casos y 300 m en el 95%

7.1 Contribuciones

En este trabajo se resaltan y analizan los distintos factores por cuyas causas las estimaciones que sobre señales incidentes ofrecen las técnicas convencionales son inexactas, lo que hace que su utilización en sistemas de localización resulte limitada, y se prefiera el empleo de algoritmos de super-resolución cuando de resolución espectral se trata.

De entre estos últimos, se ha trabajado con MUSIC, Root-MUSIC y Matrix Pencil, a efectos de demostrar su capacidad aplicada a la localización de fuentes basada en la perspectiva de reconstrucción de la señal, y comparado su desempeño con técnicas convencionales como la transformada de Fourier.

Si bien se demuestra claramente que mejoran tanto la probabilidad de resolución como la precisión, esto se produce a cambio de un aumento en la complejidad de implementación que dependerá del algoritmo escogido. Así mismo, dentro del grupo de algoritmos de super-resolución, la complejidad de cómputo, que varía con el algoritmo, es un factor de gran importancia a tener en cuenta para el despliegue de soluciones de este tipo en dispositivos cuyo destino sea la utilización en tiempo real.

La contribución de este trabajo de investigación puede resumirse en los siguientes puntos:

- Utilidad de las herramientas de simulación y modelaje radioeléctrico
- Ventajas del método propuesto para ser aplicado a los algoritmos de super-resolución y su comparativa con respecto a las técnicas convencionales
- Comparativa en cuanto a desempeño, precisión y sencillez de los algoritmos de super-resolución más comunes

En la realización del estudio se implementó un procedimiento de medición calibrado mediante simulaciones, y se hizo uso de una herramienta que determina el valor del campo electromagnético del entorno real bajo estudio. La herramienta fue validada para proporcionar resultados fiables, requiriendo para ello un tiempo de ejecución más que aceptable (minutos frente a las horas que demandaban otras para la identificación y trazado de los mismos entornos) Esta tesis pone de manifiesto, por lo tanto, la importancia de disponer de una buena herramienta de simulación de entornos radio. Se trata, sin duda, de un elemento clave a la hora de disponer de forma rápida de los datos necesarios para evaluar la efectividad de los algoritmos de super-resolución, permitiendo

conocer el número preciso de señales y, con ello, la dimensión exacta de los subespacios de ruido y de señal.

El inconveniente en este tipo de simulaciones viene de la mano de disponer de los modelos adecuados de los escenarios a simular. La creación de las distintas facetas edilicias, así como la representación adecuada de las características radioeléctricas de los materiales que las componen, demandan un esfuerzo considerable. Aún así, la necesidad de ejecutar repetidas simulaciones, modificando aspectos como los tipos de antenas o sus ubicaciones, demandaría un esfuerzo muy importante para el caso de tener que efectuar mediciones de campo. FASANT, la herramienta utilizada en este trabajo, se mostró versátil y rápida en la ejecución de las simulaciones.

Queda demostrada la capacidad de los métodos de super-resolución a la hora de resolver campos de ondas en la misma frecuencia, separando las señales que llegan desde varias direcciones, y calculando con precisión el número de las mismas, aún con antenas de poca apertura.

Se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante la aplicación de algoritmos de super-resolución, con la de aquellos conseguidos a través de la transformada inversa de Fourier (IFT) y entre ellos mismos. Puesto que la estimación espectral es una función estadística de los datos, su desempeño solo puede describirse estadísticamente, por lo que fue necesario disponer de una gran cantidad de datos. Para llevar esto a cabo se han utilizado distintas métricas o parámetros estadísticos; los escogidos en este trabajo para la evaluación han sido los siguientes: SNR, desviación estándar, número de muestras, tiempo de cómputo, varianza o error cuadrático medio; verificando que los métodos no paramétricos ofrecen una mayor resolución, con reducción apreciable de los lóbulos laterales, a la vez que mejoran la robustez en cuanto a limitaciones en la calidad y cantidad de datos. Otra métrica importante a la hora de indicar la mayor o menor bondad del algoritmo es la capacidad de resolución, en la que es importante que la búsqueda de los picos espectrales muy próximos no produzca otros que no correspondan con señales reales. En su comparación se establecieron claramente las características de interés, de forma de poder comparar objetivamente sus cualidades.

Un nuevo método, que hace uso de un solo sensor y exhibe una serie de características deseables para la mayoría de las aplicaciones en las que se trata con fuentes de banda estrecha, es propuesto. Se comparan entre sí los resultados de la aplicación de este método a los diferentes algoritmos de super-resolución, así como con los de otros métodos tradicionales.

7.2 Trabajo a desarrollar

La línea de investigación debe continuar con pruebas en real en diferentes superficies para evaluar adecuadamente las estadísticas.

Tiene que profundizarse el trabajo analizando el efecto del ancho de banda sobre el error en la estimación de distancias, en especial para anchos de banda superiores a los 5 GHz. El empleo de señales cuyos anchos de banda fueran del orden de varios GHz permitiría resolver retardos muy pequeños producidos por la multiplicidad de caminos recorridos por la señal. Estaríamos hablando de nanosegundos o aún menos, o lo que es lo mismo, a resoluciones del orden de los 30 cm o aún mayores. La reducción del efecto de desvanecimiento que puede esperarse es significativa, especialmente en entornos de interiores, lo que haría posible la operación aún con potencias de transmisión muy bajas.

Se propone también que, en el futuro, se tome un número mayor de mediciones sobre canales reales y se los analice con los distintos algoritmos de super-resolución. Los de estos tipos, basados en autovectores, son claramente, la mejor opción para canales simulados con llegadas discretas. Si bien se trata de una alternativa costosa, es de esperar que así se manifiesten aquellos efectos electromagnéticos no contemplados por los métodos de simulación.

Considerando que un canal real no se compone solo de multi-caminos discretos, puede concluirse que lo que más se asemeja a la realidad son las llegadas en cluster (por ejemplo en el caso del espectro diseminado) En estos casos es probable que los algoritmos de super-resolución basados en autovectores no se comporten de un modo tan óptimo como se espera de ellos. Esta es otra de las circunstancias que debería ser investigada.

En esta tesis se ha trabajado en la localización de una fuente única, por lo que queda atacar el problema de la localización de múltiples fuentes de campo lejano.

La precisión de los métodos de super-resolución depende en gran medida de los arreglos. Los elementos que constituyen la antena están separados por una distancia de tan solo la mitad de la longitud de onda, razón por la cual no es de descartar que en la realidad se produzcan fuertes acoplamientos electromagnéticos que conduzcan a severas distorsiones no uniformes de los haces de los elementos de la antena. Por lo que se debe investigar cuál es la sensibilidad de estos métodos ante los errores en las mediciones producidos por los distintos tipos de imperfecciones en las antenas.

Por último, se debe investigar la adaptabilidad de estos algoritmos para el caso de señales de banda ancha, puesto que en los últimos años estas señales han comenzado a

remplazar a las de banda estrecha en muchas de las aplicaciones. Por poner solo un par de ejemplos, podemos hablar del radar en banda ultra-ancha (UWB), que produce imágenes de alta resolución; o de las comunicaciones inalámbricas UWB, que reducen la atenuación del canal por efecto del multi-camino. El empleo de las altas frecuencias vinculadas a la UWB podría representar también una solución al problema de los errores en la estimación de distancias en interiores debido a la existencia de múltiples caminos.

Referencias

- [1] Hirotugu Akaike, “*A New Look at the Statistical Model Identification*”,
IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 19 (6): 716–723. 1974
- [2] R. O. Schmidt, “*A signal subspace approach to emitter location and spectral estimation*”,
Tesis doctoral, Universidad de Stanford. Noviembre 1981
- [3] D. F. Breslin, “*Adaptive antenna arrays applied to position location*”,
Master of Science Thesis, Virginia State University, August 1997
- [4] Rohde & Schwarz, “*Application of DF antennas for Direction Finders*”,
News from Rohde & Schwarz, Number 159 (1998/III)
- [5] Johnson, D. and Dudgeon, D., “*Array Signal Processing: Concepts and techniques*”,
Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993
- [6] Zoltowski, M., Kautz, G., and Silverstein, S., “*Beamspace Root-MUSIC*”,
IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, pp. 344-364, Jan. 1993.

[7] Agrawal, M. and Prasad, S., "*Broadband DOA estimation using spatial-only modeling of array data*",

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 48, pp. 663-670, Mar. 2,000

[8] Buckley, K. and Griffiths, L., "*Broad-band signal-subspace spatial-spectrum (BASS-ALE) estimation*",

IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 36, pp. 953-964, July 1,988

[9] Boyd, P., "*Chebyshev and Fourier Spectral Methods*",

DOVER Publications, Inc., 1,999

[10] Wang, H. and Kaveh, M., "*Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wide-band sources*",

IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-33, pp. 823-831, Aug. 1,985

[11] E. Lau and R. S. Adve, "*Combined CDMA and matrix pencil direction of arrival estimation*",

Proceedings of the 2002 Fall VTC, September 2,002

[12] R. S. Adve and T. K. Sarkar, "*Compensation for the effects of mutual coupling on direct data domain algorithms*",

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 48, no. 1, pp. 86-94, January 2,000

[13] J. M. Hernando Rábanos, C. Lluch Mesquida, "*Comunicaciones Móviles de Tercera Generación UMTS*",

Telefónica Móviles España, 2.000

[14] D. W. Tufts, R. Kumaresan, I. Kirsteins, "*Data adaptative signal estimation by singular value decomposition of a data matrix*",

Proc. IEEE, Vol 70, no 6, pp. 684-685, June 1,982

[15] R. I. Reza, "*Data Fusion for Improved TOA/TDOA Position Determination in Wireless Systems*",

Master Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, July 2,000

[16] Viberg, M., Ottersten, B., and Kailath, T., "*Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting*",

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 39, pp. 2436-2449, Nov. 1,991

[17] M. Wax, R. Kailath: "*Detection of Signals by information theoretic criteria*",

IEEE Transaction on Acoustic Speech and Signal Processing. ASS-33, pp 387-392, April 1,985

[18] Ottersten, B. and Kailath, T., "*Direction-of-arrival estimation for wideband signals using the ESPRIT algorithm*",

IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-38, Feb. 1,990

[19] M. Cátedra, J. Perez, F. Sáez de Adana, O. Gutiérrez, "*Efficient Ray Tracing Techniques for Three-Dimensional Analysis of Propagation in Mobile Communications: Application to Picocell and Microcell Scenarios*",

IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 40, no. 2, April 1,998.

[20] Lee, T.-S., "*Efficient wide-band source localization using beamforming invariance technique*",

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 42, pp. 1376-1387, June 1,994

- [21] Roy, R. and Kailath, T., "*ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques*",
IEEE Trans. Signal Processing, vol. 37, pp. 984-995, July 1, 1989
- [22] Schwarz, G., "*Estimating the dimension of a model*",
The Annals of Statistics, vol. 6, pp. 461-464, Mar. 1, 1978
- [23] José Enrique Fernández del Río, "*Estudio del Acoplo Mutuo en Algoritmos de Gran Resolución para la estimación de direcciones de llegada usando antenas en array*",
Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Julio de 1.997
- [24] R. S. Adve, O. M. Pereira-Filho, T. Sarkar, and S. Rao, "*Extrapolation of time domain responses from three dimensional objects utilizing the matrix pencil technique*",
IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, pp. 147–156, January 1, 1997
- [25] J. Pérez, F. Sáez de Adana, O. Gutiérrez, I. González. M. F. Cátedra, I. Montiel, J. Guzmán, "*FASANT: Fast Computer Tool for the Analysis of On Board Antennas*",
IEEE Antennas & Propagation Magazine, vol. 41, nº 2, April 1, 1999
- [26] Hung, H. and Kaveh, M., "*Focusing matrices for coherent signal-subspace processing*",
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-36, pp. 1272-1282, Aug. 1, 1988

[27] Lake, D., *"Harmonic phase coupling for battlefield acoustic target identification"*,

Proc. IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'98), (Seattle, WA), May 1, 1998

[28] Phillip E. Pace, David Wickersham, David C. Jenn, and Nathan S. York, *"High-Resolution Phase Sampled Interferometry Using Symmetrical Number Systems"*,

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 49, N° 10, October 2, 2001

[29] Zatman, M., *"How narrow is narrowband?"*,

IEEE Proc.-Radar, Sonar Navig., vol. 145, pp. 85-91, Apr. 1, 1998

[30] Barabell, A., *"Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms"*,

Proc. IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'83), (Boston, MA), May 1, 1983

[31] Rohde & Schwarz, *"Introduction into Theory of Direction Finding"*

Rohde & Schwarz Radiomonitoring & Radiolocation, Catalog 2011/2012

[32] Stoica, P. and Moses, R., *"Introduction to Spectral Analysis"*,

Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1, 1997

[33] Valaee, S., Champagne, B., and Kabal, P., *"Localization of wideband signals using least-squares and total least-squares approaches"*,

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, pp. 1213-1222, May 1, 1999

[34] Geo_rey G. Messier, Michel Fattouche and Brent R. Petersen, "*Locating an IS-95 Mobile Using Its Signal*",

The Tenth International Conference on Wireless Communications (Wireless 98), vol. II, (Calgary, AB, Canada), July 1, 1998, pp. 562-574.

[35] Gene H. Golub, Ch.F. Van Loan. "*Matrix Computations*",

Johns Hopkins University Press, Baltimores, Mariland 1,996

[36] Y. Hua, T.K. Sarkar, "*Matrix Pencil method and its performance*",

Proc. ICASSP, pp 2476-2479, New York, April 1, 1988

[37] Y. Hua, T.K. Sarkar, "*Matrix Pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise*",

IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing. Vol 38, no 5, pp 814-824, May 1, 1990

[38] Y. L. C. Jong, "*Measurement and Modeling of Radio wave Propagation in Urban Microcells*",

PhD Thesis, Department of Electrical Engineering, University of Technology (EUT), Netherlands, 2001

[39] Benesty J., Chen J., Huang Y., "*Microphone Array Signal Processing*",

Springer, 2,008

[40] Steven M. Kay, "*Modern Spectral Estimation*",

Prentice Hall Signal Processing Series, 1, 1988

[41] Schmidt, R., "*Multiple emitter location and signal parameter estimation*",

IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-34, pp. 276-280, Mar. 1, 1986

[42] Doron, M. and Weiss, A., "*On focusing matrices for wide-band array processing*",

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, pp. 1295-1302, June 1, 1992

[43] T. Shan, M. Wax, T. Kailath, "*On spatial smoothing for Direction of Arrival Estimation of coherent signals*",

IEEE, Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol ASSP-33, no 4, pp. 806-811, August 1, 1985

[44] Y. Hua, T.K. Sarkar. "*On SVD for estimating generalized eigenvalues of singular matrix pencil in noise*",

IEEE trans. Signal Process, Vol 39, no. 4, pp. 892-899, April 1, 1991

[45] Trees, H. V., "*Optimum Array Processing*",

New York: John Wiley & Sons, 2,002

[46] B. D. Rao, K. V. S. Hari, "*Performance Analysis of Root-Music*",

IEEE, Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, No. 12, pp. 1939-1949, December 1, 1989

[47] N. A. Alsindi, "*Performance of TOA Estimation Algorithms in Different Indoor Multipath Conditions*",

Master Thesis, Worcester Polytechnic Institute, April 2, 004

[48] W. Read, "*Review of Conventional Tactical Radio Direction Finding Systems*",

Defense Research Establishment Ottawa, Technical Note 89-12, May 1, 1989

[49] J. C. Liberti and T. S. Rappaport, "*Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications*",
Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1,997

[50] J. Winters, "*Smart Antennas for Wireless Systems*",
IEEE Personal Communications Magazine, pp. 23-27, February 1,998.

[51] H. Krim, J. G. Proakis, "*Smoothed Eigenspace-Based Parameter Estimation*",
Communications and Digital Signal Processing Center for Research and Graduate
Studies, Northeastern University, Boston, April 2,004

[52] Swingler, D. and Krolik, J., "*Source location bias in the coherently focused high-resolution broadband beamformer*",
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 37, pp. 143-145, Jan. 1,989

[53] K. Dandekar, "*Space Division Multiple Access Systems: Computational Electromagnetic Studies of the Physical and Network Layers*",
Tesis doctoral, Universidad de Texas, Mayo 2.001

[54] Wax, M. and Kailath, T., "*Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods*",
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-32, pp. 817-827,
Aug. 1,984

[55] Rohde & Schwarz, "*Super-resolution DF method identifies co-channel signals*",
News from Rohde & Schwarz, Number 194 (2,007/III)

[56] H. Yamada, M. Ohmiya, Y. Ogawa, K. Itoh, "*Superresolution Techniques for Time-Domain Measurements with a Network Analyzer*",

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 39, No. 2, pp. 177-183, Feb. 1, 1991

[57] Paige, C.C., "*The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large and sparse matrices*",

Ph.D. thesis, London University, London, England (1971)

[58] Su, G. and Morf, M., "*The signal subspace approach for multiple wideband emitter location*",

IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-31, pp. 1502-1522, Dec. 1, 1983

[59] F. R. Gantmacher, "*Theory of Matrices, Volume I*",

New York, Chelsea, 1, 1960

[60] Ali Aassie Ali, A. S. Omar, "*Time of Arrival Estimation for WLAN Indoor Positioning Systems using Matrix Pencil Super Resolution Algorithm*",

Proceedings of the 2nd Workshop on Positioning, Navigation and Communication (WPNC'05) & 1st Ultra-Wideband Expert Talk (UET'05)

[61] Lehman, S. and Devaney, A., "*Transmission mode time-reversal super resolution imaging*",

J. Acoust. Soc. Am., vol. 113, pp. 2742-2753, May 2, 2003

[62] Win, M. and Scholtz, R., "*Ultra-wide bandwidth time-hopping spread-spectrum impulse radio for wireless multiple-access communications*",

IEEE Trans. on Communications, vol. 48, pp. 679-691, Apr. 2, 2000

[63] Hussain, M., *"Ultra-wideband impulse radar - an overview of the principles"*,

IEEE AES Systems Magazine, pp. 9-14, Sept. 1, 1998

[64] Ghavami, M., Michael, L., Kohno, R., *"Ultra-wideband signals and systems in communication engineering"*,

John Wiley and Sons, 2,004

[65] M. Pasavento, A. Gershman, *"Unitary Root-MUSIC with a Real-Valued Eigendecomposition: A Theoretical and Experimental Performance Study"*,

IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 48, no. 5, May 2,000

[66] Claudio, E. D. and Parisi, R., *"WAVES: Weighted average of signal subspaces for robust wideband direction finding"*,

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 49, pp. 2179-2190, Oct. 2,001

[67] Valaee, S. and Kabal, P., *"Wideband array processing using a two-sided correlation transformation"*,

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, pp. 160-172, Jan. 1, 1995

Listado de Símbolos y Abreviaturas

AIC	Akaike Information Criteria
AOA	Angle-Of-Arrival
AZB	Angular Z-Buffer
BICSSM	Beamforming-Invariant CSSM
CDMA	Code Division Multiple Access
CEP	Circular Error Probability
CIR	Channel Impulse Response
CPU	Central Processing Unit
CRLB	Cramer-Rao Lower Bound
CSSM	Coherent Signal Subspace Method
DAB / DVB	Digital Audio Broadcasting / Digital Video Broadcasting
DF	Direction Finder
DFT	Discrete Fourier Transform
DOA	Direction-Of-Arrival
DS	Delay-and-sum beamforming
DSP	Digital Signal Processing
ENB	Equivalent Noise Bandwidth
ERT	Electromagnetic Ray Tracing
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
EVD	Eigenvalue Decomposition
FCC	Federal Communications Commission

Listado de Símbolos y Abreviaturas

FFT	Fast Fourier Transform
FOV	Field of View
GDOP	Geometric Dilution of Precision
GO	Geometrical Optics
GTD	Geometrical Theory of Diffraction
IFT	Inverse Fourier Transform
MDL	Minimum Description Length
MLE	Maximum Likelihood Estimator
MSE	Medium Square Error
MUSIC	Multiple Signal Classification
PCA	Principal Components Analysis
PO	Physical Optics
RF	Radio Frequency
RMS	Root Mean Square
RSS	Received Signal Strength
SNR	Signal to Noise Ratio
SVD	Singular Value Decomposition
SVP	Volumetric Space Partitioning
TOA	Time-Of-Arrival
ULA	Uniform Linear Array
UTD	Uniform Theory of Diffraction
UWB	Ultra Wide Band
WAVES	Weighted Average of Signal Subspaces
WSF	Weighted Subspace Fitting